Universidad de Oviedo

Universidad de Oviedo

Facultad de Ciencias

EL PROBLEMA DE LA SECRETARIA

Trabajo de Fin de Grado de Matemáticas

Autor: Alejandro Díaz Nadales
Tutor: José María Grau Ribas

Julio 2020

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El Problema de la Secretaria (*Secretary Problem* en inglés, de ahí que en ocasiones se abrevie por sus siglas SP) es un problema perteneciente a la Teoría de Parada Óptima y que empezó a estudiarse de manera formal en la década de 1950. A continuación se expone su versión tradicional.

Un empleador quiere contratar a una nueva secretaria. Para ello, redacta y publica un anuncio. Al puesto de trabajo optan n candidatos, siendo este valor un dato conocido. El empleador entrevista a los solicitantes en un orden aleatorio y, tras cada una de las entrevistas, sólo puede llevar a cabo dos acciones: contratar al candidato que está entrevistando en ese momento, de manera que ya no entrevistará a ningún otro candidato posterior; o rechazar a dicha persona y pasar a la siguiente entrevista, teniendo en cuenta que esta decisión es irrevocable, por lo que un candidato rechazado no podrá ser llamado más adelante. El objetivo del empleador es contratar al mejor candidato de todos.

El SP admite otras denominaciones, como son el problema de la dote del sultán o el problema del concurso de belleza, debido a que dicho problema se puede formular de muchas maneras diferentes, si bien todas ellas son matemáticamente equivalentes. Por lo tanto, para que un problema pueda ser considerado equivalente al Problema de la Secretaria, debe presentar las siguientes características:

1. Se quiere seleccionar el mejor objeto de un determinado conjunto.
2. El número total n de objetos es conocido.
3. Los objetos son inspeccionados en un orden aleatorio, teniendo cada orden la misma probabilidad de ser escogido. Dado que hay n objetos en total, el número de permutaciones posibles y, por lo tanto, de diferentes secuencias en las que pueden ser inspeccionados los objetos es $n!$.
4. Es posible ordenar los objetos desde el mejor hasta el peor. La decisión de seleccionar o rechazar un objeto se basa sólo en la comparación con los objetos ya inspeccionados, observando únicamente si un objeto es mejor o peor que otro, y sin utilizar ningún otro tipo de información.

5. Un objeto rechazado no podrá ser seleccionado posteriormente.

6. La única manera de tener éxito en el objetivo es seleccionar al mejor objeto. En cualquier otro caso, se habrá fracasado en el objetivo.

1.1. Historia del problema

El Problema de la Secretaria empezó a desarrollarse en la década de 1950. El matemático estadounidense Merrill Flood, que hizo notables aportaciones para el desarrollo de la teoría de juegos, presentó una versión del problema en una conferencia en la Universidad George Washington en Enero de 1950. Por su parte, el estadístico Herbert Robbins ya conocía el problema en 1953, cuando impartía clases en la Universidad de Columbia. Dos años más tarde, en 1955, el eminente estadístico Frederick Mosteller supo de la existencia del problema debido a Andrew Gleason.

Sin embargo, hubo que esperar hasta Febrero de 1960 para que el problema apareciera impreso por primera vez. Fue en la columna de Martin Gardner de la revista *Scientific American*, y el problema había sido planteado por Fox y Marnie. Al mes siguiente, en Marzo de 1960, apareció en dicha revista científica una solución del problema, proporcionada por Moser y Pounder. A partir de entonces, fueron muchos probabilistas y estadísticos los que estudiaron el problema. En 1961, Lindley consideró en [1] el problema de minimizar el rango[1] esperado del objeto seleccionado, siendo el rango igual a 1 para el mejor objeto. Sin embargo, la búsqueda de una estrategia óptima para resolver el problema se hacía bastante difícil cuando se consideraba un número de objetos n grande. Por ello, hubo que esperar hasta 1964 para que Chow, Moriguti, Robbins y Samuels resolvieran finalmente el problema. En 1963, Dynkin consideró en [2] el problema como una aplicación de la teoría de Markov.

Ya en 1966, John P. Gilbert y Frederick Mosteller publicaron [3], un artículo muy importante sobre el SP. En él, trataron diversas variantes del problema, como por ejemplo:

- El problema de obtener el mejor o el segundo mejor objeto.
- El *Full-Information Secretary Problem (FISP).*
- La posibilidad de disponer de r elecciones para encontrar al mejor objeto.

Este artículo fue el detonante de ideas, generalizaciones y esfuerzos por parte de la comunidad matemática, de manera que hoy en día podemos decir que este problema constituye un área de estudio dentro de la Teoría de la Probabilidad.

[1]Sean $x, y \in X$, se utiliza la relación $x \succ y$ para indicar que x es mejor que y y, análogamente, se escribe $x \prec y$ en el caso en el que x sea peor que y. Dicho esto, dado un elemento x perteneciente al subconjunto Y de X, $x \in Y \subseteq X$, se denota y define el rango parcial de dicho elemento x como $\rho_Y(x) := card\left(\{y \in Y \mid y \succ x\}\right) + 1$. Se habla de rango global cuando $Y = X$. De esta forma, el rango global de cualquier elemento coincide con el puesto que ocuparía dicho elemento si se ordenaran todos desde el mejor hasta el peor.

Esto sería un pequeño resumen de los inicios del Problema de la Secretaria como tal. Sin embargo, si se viaja más atrás en el tiempo, aparecen varios problemas que pudieron ser el origen del Problema de la Secretaria, si bien presentan algunas diferencias que impiden que puedan ser considerados equivalentes a éste. Se exponen a continuación dichos problemas.

1.1.1. El problema de Cayley

El británico Arthur Cayley (1821-1895) es uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Su trabajo consta de 967 artículos. Uno de ellos, el artículo número 705, contiene problemas y soluciones que él presentó a la revista *Times Educational Supplement* entre los años 1871 y 1894. Uno de estos problemas dice lo siguiente:

> Una lotería se organiza de la siguiente manera: Hay n boletos, cada uno con un valor de $a, b, c, \ldots$ libras respectivamente. Una persona elige uno de ellos, mira el valor que tiene el boleto y, si lo desea, lo descarta y elige otro de los restantes $n-1$ boletos. Este proceso puede repetirlo k veces, y finalmente recibe el importe del boleto que ha decidido quedarse. Suponiendo que dicha persona toma las decisiones de la manera más beneficiosa para ella de acuerdo con la teoría de la probabilidad, ¿cuál es el importe que espera obtener?

Cayley resolvió el problema mediante lo que hoy en día se conoce como programación dinámica. A modo de ejemplo, considera el caso $n = 4$, y $a, b, c, d = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. Lógicamente, la persona que participa en la lotería no conoce el intervalo en el que se encuentran los valores de los boletos (de lo contrario, simplemente debería elegir cada uno de los boletos hasta toparse con el de valor 4). Así, para el caso $k = 1$, es fácil observar que el valor esperado es $\frac{10}{4}$, es decir, si la persona decide quedarse con el primer boleto que ha seleccionado, el valor que espera obtener es de 2.5 libras. Para $k = 2, 3, 4$, Cayley consiguió demostrar que los valores esperados serían $\frac{38}{12}$, $\frac{85}{24}$, 4, respectivamente. El problema de Cayley quedó en el olvido hasta que lo recuperó Moser en 1956, quien lo formuló de una manera más elegante y consideró el caso en el que n es grande y $a, b, c, \ldots$ toman los valores $1, 2, 3, \ldots, n$.

A pesar de las similitudes, el Problema de Cayley no puede ser considerado equivalente al Problema de la Secretaria, ya que no cumple las condiciones 4 y 6 de la introducción. En el SP se consigue el objetivo si y sólo si se elige al mejor objeto, por lo tanto, si se escoge a cualquier otro, se habría fracasado. Sin embargo, en el Problema de Cayley, aunque no se consiga elegir al mejor objeto, se sigue teniendo una cierta recompensa, que es el valor del boleto seleccionado. Es por esto por lo que no se cumple la condición 6. Con respecto a la condición 4, en la versión tradicional del SP, para determinar si un objeto es mejor o peor que otro, hay que basarse únicamente en la comparación de los rangos parciales de dichos objetos (no se puede usar ningún otro dato). Sin embargo, en el Problema de Cayley, a los objetos se les asigna un valor numérico, así que se dispone de más información para tomar las decisiones.

1.1.2. El problema de Kepler

Retrocediendo aún más en el tiempo, se llega hasta la primera aplicación práctica de observación secuencial y técnicas de selección: la selección de esposa por parte de Kepler. El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), tras quedar viudo en 1611, se propuso encontrar una nueva esposa. Su primer matrimonio había sido concertado, por lo que esta vez prefirió tomar su propia decisión. Para ello, utilizó la misma meticulosidad que usaba en sus estudios científicos. Llegó a tener 11 pretendientas, y el proceso de seleccionar a la que él consideraba la mejor le llevó cerca de 2 años.

A pesar de que Kepler se sintió fuertemente atraído por la candidata número 5, sus amigos no estaban del todo convencidos de que ella fuera la mejor opción, ya que era una mujer que procedía de una familia humilde y de poco poder, algo que se tenía muy en cuenta en aquella época. Siguiendo los consejos de sus amigos, Kepler acabó eligiendo a la candidata número 4. Sin embargo, había tardado tanto tiempo en tomar la decisión que ella lo rechazó. Finalmente, Kepler acabó casándose con la quinta candidata.

Por lo tanto, este problema también tiene similitudes con el Problema de la Secretaria, pero debido a las siguientes características, no puede ser considerado equivalente a éste:

- Kepler tenía la posibilidad de volver atrás y elegir a una pretendienta con la que ya se hubiese citado anteriormente (aunque con una cierta penalización, ya que existía la posibilidad de que ella ya no estuviera interesada, como fue el caso). Esto va en contra de la condición 5 enumerada en la introducción.
- A pesar de que Kepler fue rechazado por la candidata número 4 (que era considerada la mejor), él siguió adelante en su búsqueda de una nueva esposa. Por lo tanto, se puede concluir que su principal objetivo no era encontrar a la mejor (violando la condición 6 de la introducción).
- Por otro lado, Kepler ya había estado casado, por lo que disponía de cierta información adicional para tomar su decisión. Es decir, la información que utilizaba para elegir una u otra candidata no se basaba únicamente en la comparación entre ellas, por lo que tampoco se cumple la condición 4 de la introducción.

1.1.3. El juego del Gúgol

Este juego para dos personas consiste en lo siguiente:

Uno de los jugadores toma tantos trozos de papel como quiera, y en cada uno de ellos apunta un número positivo diferente. Los números pueden tomar valores desde una pequeña fracción de la unidad hasta un gúgol $\left(10^{100}\right)$. Los trozos de papel se colocan boca abajo sobre la mesa y se mezclan. El otro jugador selecciona un trozo de papel, le da la vuelta para mirar el número que se ha anotado en él, y decide si se lo queda o, por el contrario, lo rechaza y elige otro.

Este proceso puede repetirlo las veces que quiera, con el inconveniente de que no se puede volver atrás, y su objetivo es parar cuando crea que tenga el trozo de papel en el que aparece el número más grande.

Este juego también tiene una diferencia con el Problema de la Secretaria. Esto es debido a que los valores de los números son revelados al jugador que intenta adivinar cuál es el número más grande, por lo tanto, dicho jugador conoce no sólo si un valor es mayor o menor que otro, sino cómo de grande o de pequeño es ese valor en comparación con otro. En otras palabras, ocurre exactamente lo mismo que en el Problema de Cayley: el jugador no se basa únicamente en el rango parcial de los objetos para tomar su decisión, sino también en los valores asignados a dichos objetos. Por ello, hay una pequeña diferencia con respecto a la condición 4 vista en la introducción[2].

1.2. Variantes del SP

Como se decía anteriormente, en el artículo de Gilbert y Mosteller de 1966 se trataron diversas variantes del Problema de la Secretaria y, a medida que fueron pasando los años, aparecieron muchas otras. A continuación, se describen brevemente varias variantes del SP (algunas de las cuales serán tratadas en el Capítulo 8 en profundidad):

1. Variante *POSTDOC*:

   En este caso, el objetivo no es encontrar el mejor objeto, sino encontrar el segundo mejor objeto.

2. El *Full-Information Secretary Problem (FISP)*:

   En la versión tradicional del SP, la persona que debe encontrar el mejor objeto no conoce nada sobre la distribución de probabilidad que siguen los objetos (es decir, sabe que un objeto es mejor o peor que otro, pero no sabe cuánto mejor o cuánto peor es dicho objeto en comparación con el otro). En esta otra versión del SP, a cada objeto se le asigna un número entero positivo siguiendo una distribución de probabilidad que es conocida, incluidos los parámetros de la misma. Estos números son revelados a medida que los objetos son inspeccionados. Por lo tanto, se dispone de mucha más información que en el SP tradicional.

3. El *Partial Information Secretary Problem (PISP)*:

   Ésta es una variante intermedia entre el SP y el FISP. Al igual que en el FISP, a los objetos se les asigna un número entero positivo y, cada vez que un objeto es inspeccionado, su correspondiente número es revelado. Además, también se conoce la distribución de probabilidad que siguen estos valores, sin embargo, no se conocen todos los parámetros de la misma.

[2] El juego del gúgol se podría llegar a considerar equivalente al SP debido a que el rango de posibles valores es inmenso, por lo que el jugador que intenta adivinar cuál es el mayor número no sabe hasta qué punto un número es grande o pequeño. Es decir, disponer de esa información adicional no supondría una gran ventaja para tomar las decisiones.

4. Variante con r elecciones:

   En este caso, se dispone de r elecciones para encontrar el mejor objeto. Por lo tanto, se habrá tenido éxito en el objetivo si en alguna de estas r elecciones se encuentra el mejor objeto. También es posible modificar la definición de "tener éxito". Por ejemplo, para $r = 2$, se podría considerar el caso en el que se tiene éxito si y sólo si el mejor y el segundo mejor objeto son seleccionados. De esta manera, aparecen muchas otras variantes del problema.

5. Variante "mejor o segundo mejor":

   En este caso, de nuevo se dispone de una única elección. Sin embargo, se considera que se ha tenido éxito en el objetivo si se encuentra al mejor objeto o al segundo mejor objeto.

6. Variante con coste por entrevista:

   En esta versión del problema, a cada objeto se le asigna un valor (positivo) y cada inspección de un nuevo objeto supone un coste (negativo). Por lo tanto, el objetivo sería optimizar la diferencia entre el valor del objeto seleccionado y el coste total del proceso.

Capítulo 2

Solución mediante programación dinámica

El objetivo del presente capítulo es hallar la probabilidad de éxito del Problema de la Secretaria (cuando se utiliza la estrategia óptima) mediante programación dinámica, método que consiste en resolver un problema complicado dividiéndolo en subproblemas más simples, de manera que las soluciones de todos estos subproblemas más sencillos permitan obtener la solución del problema inicial.

Como se ha comentado en la introducción, el SP es un problema que consiste en disponer de un número n finito de objetos, siendo n un dato conocido, y se quiere seleccionar el mejor de todos. Para ello, se inspeccionan los diferentes objetos de uno en uno, de manera que, tras inspeccionar el objeto k-ésimo, hay que decidir si se selecciona o si se rechaza. En el primer caso, el proceso habría terminado, y se habría tenido éxito si el objeto seleccionado es efectivamente el mejor. En el segundo caso, dicho objeto quedaría descartado para siempre y se pasaría a inspeccionar el siguiente objeto.

Se utilizará la siguiente notación:

- $P_n^R(k) =$ Probabilidad de éxito al rechazar el k-ésimo objeto con n objetos en total.
- $P_n^A(k) =$ Probabilidad de éxito al aceptar el k-ésimo objeto con n objetos en total, siendo éste un objeto maximal (es decir, mejor que todos los inspeccionados hasta ese momento).
- $P_n =$ Probabilidad de éxito usando la estrategia óptima con n objetos en total. Su valor es $P_n^R(0)$, que es equivalente a decir la probabilidad de éxito antes de comenzar.

En todo juego finito, la estrategia óptima consiste en seleccionar en cada nodo de decisión la acción de mayor probabilidad de éxito. Tras cada inspección, sólo hay dos acciones posibles: aceptar el objeto o rechazarlo. Lógicamente, si el objeto no es maximal la estrategia óptima debe rechazarlo ya que, de lo contrario, se estaría eligiendo un objeto que no es el mejor y, por lo tanto, la probabilidad de éxito sería nula. De este modo, la disyuntiva entre aceptar o rechazar el objeto k-ésimo aparece cuando éste es maximal, lo cual ocurre con probabilidad $\frac{1}{k}$ (ya que es la probabilidad de que el mejor de los k primeros objetos esté en la posición k-ésima). Con estas simples consideraciones, el problema puede ser resuelto mediante el uso de programación dinámica. Solamente se debe tener en cuenta los dos escenarios posibles que aparecen cuando se observa el objeto k-ésimo:

1. El objeto no es maximal: La acción óptima es rechazarlo y la probabilidad de éxito es $P_n^R(k)$.
2. El objeto es maximal: La acción óptima entre aceptarlo y rechazarlo es la que proporcione mayor probabilidad de éxito, y dicha probabilidad de éxito es:
$$\text{máx}\left\{P_n^R(k), P_n^A(k)\right\} \tag{2.1}$$

Se estudia a continuación esta segunda situación con más detalle:

- Si $P_n^A(k)$ es la mayor de las dos probabilidades, entonces se aceptará el objeto k-ésimo, y sólo se tendrá éxito en el objetivo si el objeto seleccionado es el mejor de todos. La probabilidad de que esto ocurra viene dada por la siguiente expresión:
$$P\left(\text{ser el mejor} \mid \text{ser maximal}\right) = \frac{P\left(\text{ser el mejor} \cap \text{ser maximal}\right)}{P(\text{ser maximal})} =$$
$$= \frac{P(\text{ser el mejor})}{P(\text{ser maximal})} = \frac{1/n}{1/k} = \frac{k}{n}$$
- Si $P_n^R(k)$ es la mayor de las dos probabilidades, entonces se rechazará el objeto k-ésimo y se pasará al siguiente. A su vez, el objeto $k{+}1$ puede ser maximal o no:
  - La probabilidad de que sea maximal es $\frac{1}{k+1}$, y la probabilidad de tener éxito en ese caso sería la descrita por la expresión (2.1) para el valor $k{+}1$.
  - La probabilidad de que no sea maximal es $\frac{k}{k+1}$, pero como no es maximal se debe rechazar, y la probabilidad de éxito en este caso sería por definición $P_n^R(k+1)$.

Con todo esto, se puede plantear la siguiente relación de recurrencia:
$$P_n^R(k) = \frac{k}{k+1}\, P_n^R(k+1) + \frac{1}{k+1}\ \text{máx}\left\{P_n^R(k+1),\ \frac{k+1}{n}\right\} \tag{2.2}$$

Sabiendo que $P_n^R(n) = 0$ (ya que se estaría rechazando el último objeto de todos y, por lo tanto, no seleccionando ninguno), y que $P_n = P_n^R(0)$, se puede proceder por inducción inversa sobre k a partir de la ecuación (2.2) para calcular P_n. Obsérvese que, de esta manera, se estaría calculando la probabilidad de éxito cuando se utiliza la estrategia óptima sin haber establecido todavía cuál es dicha estrategia, destacando así lo fácil que resulta el cálculo de P_n por esta vía. Se muestran a continuación dos programas realizados en *Matlab* para calcular $P_n^R(k)$:

```
% Cálculo de la probabilidad de éxito al rechazar el objeto k-ésimo a
% partir de la relación de recurrencia:

function [y] = PR(k,n)

if k == n
    y = 0;
else
y = 1/(k+1)*max((k+1)/n,PR(k+1,n)) + k/(k+1)*PR(k+1,n);

end

end
```

```
% Cálculo de la probabilidad de éxito al rechazar el objeto k-ésimo a
% partir de la relación de recurrencia:

function [y] = Prech(k,n)

if k > n
    y = [];
else
    y = 0;

for j = n-1:-1:k
    y = 1/(j+1)*max((j+1)/n,y) + j/(j+1)*y;
end

end

end
```

Ambos programas sirven para lo mismo, que es calcular $P_n^R(k)$. El primero está construido introduciendo directamente la relación de recurrencia (2.2). Esto supone que, al ejecutarlo, el programa tenga que llamarse a sí mismo, lo cual no es eficiente. Dicho problema se puede resolver mediante un pequeño bucle tal y como aparece en el segundo programa, por lo que es más conveniente utilizar éste último. Sin embargo, se ha decidido mostrar también el primer código porque es más visual, lo que permite al lector comprobar lo sencillo que es calcular $P_n^R(k)$ y, por ende, P_n, mediante un lenguaje de programación.

Por lo tanto, ejecutando cualquiera de estos programas para el valor $k = 0$ se obtiene la probabilidad de éxito bajo la estrategia óptima. Los resultados obtenidos para los 10 primeros valores de n son los siguientes:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	0.5	0.5	0.4583	0.4333	0.4278	0.4143	0.4098	0.4060	0.3987

Cuadro 2.1: Valores de P_n para diferentes valores de n.

Capítulo 3

Estrategia de umbral. Umbral óptimo

En este capítulo, se va a estudiar en primer lugar cuál es la estrategia óptima del SP, es decir, la estrategia que se debe llevar a cabo para maximizar la probabilidad de éxito. Esto es bastante simple ya que, como se decía en el capítulo anterior, no hay más que tener en cuenta que, en todo juego finito, la estrategia óptima consiste en seleccionar en cada nodo de decisión la acción de mayor probabilidad de éxito.

En segundo lugar, se calculará la probabilidad de encontrar el mejor objeto cuando se utiliza dicha estrategia óptima, así como el umbral óptimo.

3.1. Estrategia óptima de umbral

Se establece a continuación que la estrategia óptima consiste en rechazar todos los objetos hasta un cierto umbral y, a partir de entonces, aceptar el primero que sea mejor que todos los anteriores. Es decir:

Teorema 3.1 *Dado el Problema de la Secretaria, si n es el número de objetos en total, entonces existe un valor k_n tal que la siguiente estrategia de elección es óptima:*

1. *Rechazar los primeros k_n objetos observados.*
2. *Después de esto, aceptar el primer objeto que sea maximal, es decir, mejor que los que ya han sido observados.*

Demostración:

Basta con realizar un pequeño estudio de la monotonía de $P_n^R(k)$ y $P_n^A(k)$ en función de k, comprobando de esta manera que $P_n^R(k)$ es decreciente mientras que $P_n^A(k)$ es creciente. Para demostrar que la probabilidad de éxito cuando se rechaza el objeto k-ésimo es decreciente, se utiliza una vez más la relación de recurrencia (2.2):

$$\begin{aligned} P_n^R(k) &= \frac{k}{k+1}\, P_n^R(k+1) + \frac{1}{k+1}\, \text{máx}\left\{ P_n^R(k+1),\ \frac{k+1}{n} \right\} \geq \\ &\geq \frac{k}{k+1}\, P_n^R(k+1) + \frac{1}{k+1}\, P_n^R(k+1) \;=\; P_n^R(k+1) \end{aligned}$$

Por su parte, la probabilidad de éxito cuando se acepta el objeto k-ésimo (siendo éste un objeto maximal) es $P_n^A(k) = k/n$ como ya se ha dicho anteriormente, por lo que se trata de una función lineal con pendiente positiva, y de ahí se concluye que $P_n^A(k) < P_n^A(k+1)$.

Entonces, debido al comportamiento de ambas probabilidades, existe un cierto k para el que $P_n^A(k)$ pasa a ser mayor que $P_n^R(k)$. Se denotará por k_n el último objeto para el que $P_n^A(k) < P_n^R(k)$. Es decir:

$$k_n \;=\; \text{máx}\left\{ k : P_n^A(k) < P_n^R(k) \right\} \tag{3.1}$$

Luego:

- Si $k \leq k_n$, se cumple que $P_n^R(k) \geq P_n^A(k)$.
- Si $k_n < k$, se cumple que $P_n^R(k) < P_n^A(k)$.

Por todo esto, se llega a la conclusión de que la estrategia óptima de umbral consiste en lo siguiente:

1. Rechazar los primeros k_n objetos observados.
2. Después de esto, aceptar el primer objeto que sea maximal, es decir, mejor que todos los que ya han sido observados.

Luego el teorema queda demostrado[1]. □

Dado que los primeros k_n objetos se rechazan de forma sistemática, se podría decir que esta parte del proceso consiste en una fase de exploración, en la que simplemente se está tratando de extraer información sobre el conjunto de candidatos.

A continuación, se representa gráficamente $P_n^R(k)$ en función de k para un cierto valor de n fijo. Por ejemplo, tomando el valor $n = 1000$ y utilizando el programa visto anteriormente, se obtiene la siguiente gráfica:

[1] No hay unanimidad a la hora de hablar del umbral óptimo. Para algunos autores, k_n es el primer objeto que ya puede ser elegido, es decir, el primer objeto que es comparado con los anteriores. Sin embargo, otros autores lo toman como el número de objetos que se rechazan automáticamente (en este trabajo se interpreta de esta última manera).

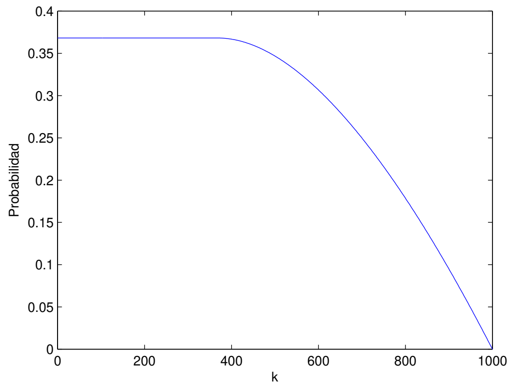

Figura 3.1: Probabilidad de éxito al rechazar el objeto k-ésimo con $n = 1000$.

Como puede observarse, $P_n^R(k)$ es constante para valores pequeños de k y, a partir de un cierto momento, comienza a decrecer hasta ser igual a 0 para $k = n$. Este comportamiento es el mismo sea cual sea el valor de n (la única diferencia radica en el valor de k en el que se produce el cambio de ser constante a ser estrictamente decreciente).

A continuación, se vuelve a representar esta gráfica junto a $P_n^A(k)$:

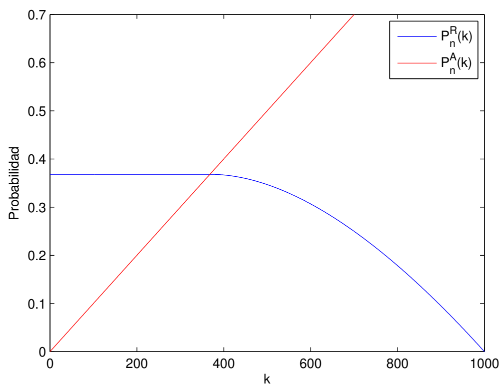

Figura 3.2: Probabilidades de éxito al rechazar y aceptar, respectivamente, con $n = 1000$.

Como puede observarse, para valores pequeños de k, $P_n^R(k)$ es mayor que $P_n^A(k)$, por lo tanto, la estrategia óptima dice que los primeros objetos deben ser rechazados. Sin embargo, debido al comportamiento de ambas funciones, llega un momento en el que se cortan y, a partir de ahí, $P_n^A(k)$ es mayor que $P_n^R(k)$. Esa intersección entre las funciones pone de manifiesto que debe haber un cambio de estrategia: ya no se rechazan los objetos automáticamente, sino que se debe aceptar el primer objeto maximal que aparezca. Por lo tanto, el cruce entre las gráficas se produce en el umbral k_n.

3.2. Cálculo de la probabilidad de éxito P_n

En el capítulo anterior, se calculó la probabilidad de éxito cuando se utiliza la estrategia óptima, P_n, a través de la relación de recurrencia (2.2). Para ello, se partió de las igualdades $P_n = P_n^R(0)$ y $P_n^R(n) = 0$, y se procedió por inducción inversa. Esto permitió calcular P_n a pesar de que aún no se había visto en qué consistía la estrategia óptima. Sin embargo, ahora que ya ha sido explicada, se va a utilizar esta información para buscar una fórmula matemática que permita calcular P_n de manera directa (sin necesidad de recurrir a un proceso iterativo como ocurría antes).

Se denotará por $P_n(r)$ la probabilidad de éxito utilizando la estrategia de umbral r. Considérese que el mejor objeto de todos está en la posición k-ésima (lo cual ocurre con probabilidad $1/n$). Para poder seleccionarlo cuando se utiliza la estrategia de umbral r y, por lo tanto, tener éxito en el objetivo, es necesario que se cumplan las 2 condiciones siguientes:

1. El valor de k debe ser superior a r ya que, de lo contrario, el mejor objeto habría sido rechazado y la probabilidad de éxito sería nula.

2. Además, para que pueda ser seleccionado, es necesario que el mejor objeto de los $k-1$ objetos anteriores esté entre los r primeros (es decir, en el conjunto de objetos que se rechazan automáticamente) ya que, si no, habría sido seleccionado de acuerdo con la estrategia de umbral y, por lo tanto, no se habría seleccionado al mejor de todos. Esto ocurre con probabilidad $\frac{r}{k-1}$.

Por todo ello, se tiene que:

$$\begin{aligned}
P_n(r) &= \sum_{k=r+1}^{n} P(k\text{-ésimo objeto es el mejor y es seleccionado}) = \\
&= \sum_{k=r+1}^{n} P(k\text{-ésimo es el mejor}) \cdot P(k\text{-ésimo es seleccionado} \mid \text{es el mejor}) = \\
&= \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{r}{k-1} \;=\; \frac{r}{n}\sum_{k=r+1}^{n}\frac{1}{k-1}
\end{aligned}$$

Luego:

$$P_n(r) = \frac{r}{n}\sum_{k=r+1}^{n}\frac{1}{k-1} \tag{3.2}$$

Como se puede ver, se obtiene una expresión que sólo depende del número total n de objetos y del umbral r. Por lo tanto, con una sencilla fórmula matemática se puede calcular la probabilidad de éxito del Problema de la Secretaria cuando se utiliza la estrategia de umbral r.

A continuación, se representa gráficamente la probabilidad de éxito $P_n(r)$ en función del umbral utilizado:

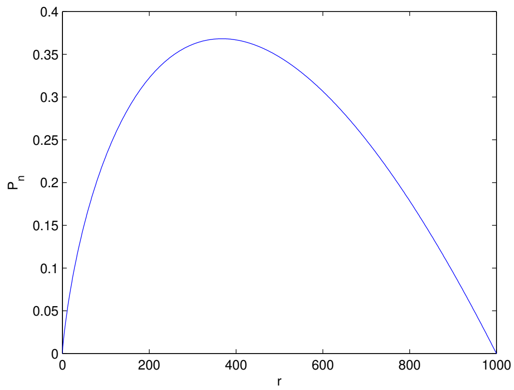

Figura 3.3: Probabilidad de éxito en función del umbral utilizado.

Como no podía ser de otra manera, se obtiene una gráfica que tiene un valor máximo en el interior del dominio. Este máximo se corresponde con el umbral óptimo k_n, lo cual queda comprobado al representar $P_n^R(k)$, $P_n^A(k)$ y $P_n(k)$ en una misma figura:

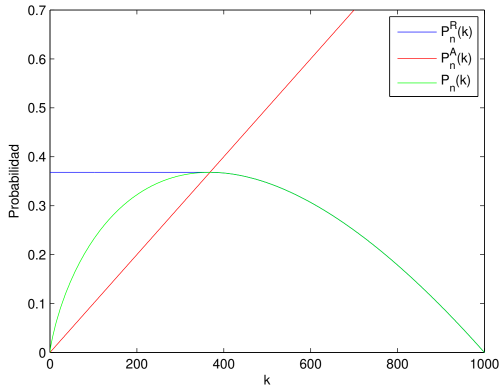

Figura 3.4: Probabilidades de éxito.

Como puede verse, la intersección entre las tres funciones se produce en el mismo punto. Al final de la sección anterior y debido a la figura (3.2), se llegó a la conclusión de que el corte entre las funciones $P_n^R(k)$ y $P_n^A(k)$ se producía en el umbral k_n, por lo tanto, dicho valor establecía el cambio de estrategia (pasar de rechazar los objetos automáticamente, a aceptar el primer objeto maximal). Dado que la función $P_n(k)$ toma el máximo valor en el punto de intersección entre las dos funciones anteriores, esta nueva gráfica viene a corroborar que k_n es el umbral óptimo, es decir, que de todos los posibles valores que podrían usarse para establecer el cambio de estrategia, k_n es el que proporciona una mayor probabilidad de éxito.

Por lo tanto, la probabilidad de éxito usando la estrategia óptima de umbral viene dada por:

$$\boxed{P_n \;=\; \frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n+1}^{n} \frac{1}{k-1} \;=\; \frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k}} \tag{3.3}$$

por lo que es necesario conocer el valor exacto del umbral óptimo k_n.

3.3. Cálculo del umbral óptimo k_n

Para hallar el valor del umbral óptimo k_n, se tiene en cuenta que es el mayor umbral que satisface la siguiente desigualdad:

$$P_n(r-1) \;\leq\; P_n(r) \tag{3.4}$$

que se puede escribir equivalentemente como sigue:

$$\frac{r-1}{n} \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{k-1} \;\leq\; \frac{r}{n} \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \tag{3.5}$$

Como puede verse, el sumatorio de la izquierda empieza en r, mientras que el de la derecha lo hace en $(r+1)$. Por lo tanto, se saca del sumatorio de la izquierda el primer término, consiguiendo así que ambos sumatorios tengan los mismos límites:

$$(r-1)\left[\frac{1}{r-1} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1}\right] \;\leq\; r \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Simplificando la expresión:

$$1 + (r-1) \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \;\leq\; r \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1}$$

$$1 \;\leq\; \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Como k_n es el mayor umbral con esta propiedad, se puede calcular de la siguiente forma:

$$\boxed{k_n \;=\; \text{máx}\left\{ r : 1 \leq \sum_{k=r+1}^{n} \frac{1}{k-1} \right\}} \tag{3.6}$$

3.4. Resultados numéricos

Una vez que ya se conocen las expresiones para calcular el umbral óptimo y la probabilidad de éxito (igualdades (3.6) y (3.3) respectivamente), se va a proceder a implementar un programa para hacer dichos cálculos y, por lo tanto, resolver el Problema de la Secretaria para un valor de n cualquiera. Se muestra a continuación el código del programa realizado en *Matlab* para calcular k_n y P_n con un número total de objetos n:

```
% Cálculo del umbral óptimo y de la probabilidad de éxito del SP:

n = input('Objetos:\');          % Número de objetos en total
k = 0:1:(n-1);                   % Posibles valores del umbral

% Cálculo del umbral óptimo kn:

for j = k

    i = (j+1):n;
    sumatorio = sum(1./(i-1));

    if sumatorio >= 1
        kn = j;
    else
        break
    end

end

% Cálculo de la probabilidad de éxito:

Pn = (kn/n)*sum(1./(((kn+1):n)-1));
```

Utilizando este programa, se obtienen los siguientes valores del umbral óptimo y de la probabilidad de éxito para diferentes valores del número total de objetos n:

n	k_n	P_n		n	k_n	P_n
1	0	1		**20**	7	0.3842
2	0 ó 1	0.5		**30**	11	0.3787
3	1	0.5		**40**	15	0.3757
4	1	0.4583		**50**	18	0.3743
5	2	0.4333		**60**	22	0.3732
6	2	0.4278		**70**	26	0.3724
7	2	0.4143		**80**	29	0.3719
8	3	0.4098		**90**	33	0.3714
9	3	0.4060		**100**	37	0.3710
10	3	0.3987		**1000**	368	0.3682
15	5	0.3894		**10000**	3679	0.3679

Cuadro 3.1: Valores de k_n y P_n para diferentes valores de n.

Hay varias cosas de esta tabla que merecen ser comentadas. En primer lugar, la sucesión formada por las probabilidades de éxito es monótona decreciente, lo cual tiene sentido ya que, al aumentar el número de objetos, lo lógico es que aumente la dificultad de encontrar al mejor de todos y, por lo tanto, que disminuya la probabilidad de éxito. Son de especial interés los casos $n = 2$ y $n = 3$, ya que la probabilidad de éxito es la misma a pesar de aumentar en una unidad el número de objetos en total. De hecho, son los únicos valores de n para los que P_n coincide. Además, el valor $n = 2$ tiene la peculiaridad adicional de que el umbral óptimo puede tomar dos valores distintos, 0 ó 1 (es decir, la probabilidad de éxito es la misma independientemente de si se escoge el primer objeto que aparezca, o bien se prefiere rechazar éste y se opta por elegir el segundo y último objeto). Por su parte, la sucesión formada por los umbrales óptimos es monótona creciente. En segundo lugar, se observa la tendencia de dichas sucesiones: así, cuando $n \to \infty$, los límites de P_n y k_n parecen ser $1/e$ y n/e, respectivamente[2].

Finalmente, la probabilidad de fracasar debido a que no haya objeto maximal (esto es, la probabilidad de que el mejor objeto caiga entre los k_n primeros) es k_n/n, que es bastante cercana a la probabilidad de éxito bajo la estrategia óptima.

Ejemplo: caso $n = 4$

A modo de ejemplo y para afianzar los conceptos, considérese el caso $n = 4$. De acuerdo con la tabla (3.1), el umbral óptimo para este número de objetos es $k_n = 1$ y la probabilidad de éxito utilizando dicho umbral es $P_n = 0.4583$. A continuación, se va a llevar a cabo un pequeño estudio sobre el conjunto de permutaciones de 4 elementos para comprobar que efectivamente estos son los valores de k_n y P_n correctos.

Como es sabido, el cardinal del conjunto de permutaciones de los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ es $4! = 24$. Considérese que los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ que se han utilizado para representar a los objetos, son sus rangos globales. De esta manera, el objeto 1 tendría rango global 1 y, por lo tanto, sería el mejor, mientras que el objeto 4 tendría rango global 4 y, consecuentemente, sería el peor. La siguiente tabla muestra todas las posibles permutaciones de estos objetos:

1234	* 2134	* 3124	* 4123
1243	* 2143	* 3142	* 4132
1324	† * 2314	† 3214	† 4213
1342	† * 2341	† 3241	† 4231
1423	† * 2413	* † 3412	† 4312
1432	† * 2431	3421	4321

Cuadro 3.2: Conjunto de permutaciones de 4 elementos.

Considerando una estrategia que consista en rechazar los primeros k objetos y elegir el primer objeto maximal que aparezca después, se desea determinar cuál es el valor óptimo de k, así como la probabilidad de encontrar al mejor objeto. Existen 4 posibilidades:

[2] Tanto la monotonía como la tendencia de ambas sucesiones serán tratadas con más detalle en los Capítulos 6 y 7, respectivamente.

- $k = 0$: se tendría éxito en 6 de las 24 permutaciones (las que se encuentran en la primera columna de la tabla).
- $k = 1$: en 11 de los 24 casos se seleccionaría al mejor objeto (aquellos marcados con $*$).
- $k = 2$: en 10 de los 24 casos se seleccionaría al mejor objeto (aquellos marcados con $\dagger$).
- $k = 3$: se tendría éxito en 6 de las 24 permutaciones (aquellas en las que el objeto 1 está en la última posición).

Como puede verse, el caso $k = 1$ es aquel en el que existe una mayor cantidad de permutaciones válidas para tener éxito en el objetivo. Dado que todas las permutaciones son igualmente probables, el valor $k = 1$ es el umbral óptimo y la probabilidad de éxito para este umbral es $\frac{11}{24} = 0.4583$. En efecto, se obtienen los resultados esperados. Obsérvese que, con esta estrategia, se está teniendo casi el doble de probabilidad de éxito en comparación con seleccionar un objeto cualquiera de manera aleatoria.

Este desarrollo realizado para encontrar el umbral óptimo y la correspondiente probabilidad de éxito, ha sido sencillo puesto que el conjunto de permutaciones con el que se ha trabajado sólo consta de 24 elementos. Sin embargo, si se considera el conjunto de permutaciones de n elementos, siendo n un número relativamente grande, el problema sería inabordable mediante esta estrategia debido a la gran cantidad de permutaciones posibles, por lo que no habría otra alternativa que recurrir a las expresiones (3.6) y (3.3) para resolver el problema.

Capítulo 4

Acotación de Gilbert y Mosteller del umbral óptimo

En el capítulo anterior, se ha calculado el valor de k_n para diferentes valores de n relativamente pequeños (tabla (3.1)). Sin embargo, ¿qué pasaría si, por ejemplo, se quisiera calcular el umbral óptimo para $n = 10^{20}$? Ni siquiera el programa realizado en *Matlab* sería capaz de resolver el problema. Por esta razón, resulta útil acotar el umbral óptimo, es decir, encontrar un pequeño intervalo en el que se encuentre k_n.

Gilbert y Mosteller trataron este asunto en [3], encontrando un intervalo de longitud poco mayor que 1 en el que se encuentra el valor del umbral óptimo. La siguiente proposición establece cuál es este intervalo de acotación, y la demostración que se proporciona incluye desarrollos que se omiten en el artículo.

Proposición 4.1 *Dado el Problema de la Secretaria con n objetos en total, si k_n es el umbral óptimo, entonces:*

$$\frac{n}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{1-3e}{-2+6e+4n} \ \leq\ k_n \ \leq\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{n}{e} \tag{4.1}$$

Demostración:

Partiendo de la expresión del umbral óptimo:

$$k_n = \max\left\{k : 1 \leq \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1}\right\} \tag{4.2}$$

se deduce lo siguiente:

$$\sum_{i=k_n+1+1}^{n} \frac{1}{i-1} < 1 \leq \sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} \Rightarrow \sum_{i=k_n+2}^{n} \frac{1}{i-1} < 1 \leq \sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_n+1} + \frac{1}{k_n+2} + ... + \frac{1}{n-1} \ < \ 1 \ \leq \ \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n+1} + ... + \frac{1}{n-1}$$

Estas dos desigualdades proporcionarán los extremos del intervalo en el que se encuentra el umbral óptimo. Para ello, será necesario cambiar los sumatorios por integrales. A continuación, se desarrolla la segunda desigualdad para obtener el extremo superior del intervalo:

$$1 \ \leq \sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} \ = \sum_{i=k_n}^{n-1} \frac{1}{i} \ \overset{(*)}{<} \int_{k_n-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} = \ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - \ln\left(k_n - \frac{1}{2}\right) \ =$$

$$= \ \ln\left(\frac{n-1/2}{k_n-1/2}\right) \ \Rightarrow \ 1 < \ln\left(\frac{n-1/2}{k_n-1/2}\right) \ \Rightarrow \ e \ < \ \frac{n-1/2}{k_n-1/2}$$

Despejando k_n se obtiene:

$$\boxed{k_n \ < \ \frac{n-1/2}{e} \ + \ \frac{1}{2} \ := \ S(n)} \tag{4.3}$$

Por lo tanto, el umbral óptimo está acotado superiormente por la función $S(n)$. Sin embargo, aún faltaría por demostrar la desigualdad del desarrollo anterior marcada con $(*)$. De manera genérica, utilizando un valor cualquiera del umbral, s, en lugar del umbral óptimo, k_n, la expresión a demostrar queda de la siguiente forma:

$$\sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{i} \ = \ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + ... + \frac{1}{n-1} \ < \int_{s-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} \tag{4.4}$$

Supóngase que para $n = s+1$ se cumple la desigualdad (4.4), es decir:

$$\frac{1}{s} \ < \int_{s-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} \ = \ \ln\left(\frac{2s+1}{2s-1}\right), \quad \forall \ s \geq 1 \tag{4.5}$$

Entonces, $\forall \ i = s, s+1, ..., n-1$ también se cumplirá:

$$\frac{1}{i} \ < \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} \tag{4.6}$$

Por lo tanto, si $n \geq s+1$ se tiene:

$$\sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{i} < \sum_{i=s}^{n-1} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} = \sum_{i=s}^{n-1} \int_{(i-1)+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} = \int_{(s-1)+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} +$$

$$+ \int_{s+\frac{1}{2}}^{(s+1)+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{(i-1)+\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} + \int_{i+\frac{1}{2}}^{(i+1)+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} + \ldots + \int_{(n-2)+\frac{1}{2}}^{(n-1)+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} = \int_{s-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x}$$

De esta forma, queda comprobada la desigualdad (4.4). Por último, para demostrar que la hipótesis de partida (4.5) es cierta, se comprobará que:

$$f(s) = \ln\left(\frac{2s+1}{2s-1}\right) - \frac{1}{s} > 0, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.7}$$

Para ello, basta con tener en cuenta las tres propiedades siguientes de la función $f(s)$:

1. La función $f(s)$ es decreciente en el intervalo $[1, +\infty)$ ya que:

$$f'(s) = \frac{1}{s^2 - 4s^4} = \frac{1}{s^2(1-2s)(1+2s)} < 0, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.8}$$

2. La función $f(s)$ es convexa en el intervalo $[1, +\infty)$ ya que:

$$f''(s) = \frac{s}{(s^2-4s^4)^2} \cdot (16s^2 - 2) > 0, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.9}$$

3. $\lim\limits_{s \to +\infty} f(s) = 0$.

Una vez que se ha demostrado completamente que la función $S(n)$ proporciona la cota superior de k_n, se procede de manera similar con la otra desigualdad que se tiene para calcular la cota inferior:

$$1 > \sum_{i=k_n+2}^{n} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=k_n+1}^{n-1} \frac{1}{i} \overset{(**)}{>} \int_{k_n+1}^{n} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_n+1} - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > \ln\left(\frac{n}{k_n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_n+1} - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e > \frac{n}{k_n+1} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_n+1} - \frac{1}{n}\right)\right] > \frac{n}{k_n+1}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_n+1} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

Llegados a este punto, se hace uso de la expresión (4.3), obteniendo lo siguiente:

$$e > \frac{n}{k_n+1}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_n+1} - \frac{1}{n}\right)\right] > \frac{n}{k_n+1}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{n-1/2}{e} + \frac{3}{2}} - \frac{1}{n}\right)\right]$$

Despejando k_n:

$$k_n \; > \; \frac{n}{e}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2e}{2n-1+3e}-\frac{1}{n}\right)\right]-1 \; = \; \frac{n}{e}+\frac{n}{2n-1+3e}-\frac{1}{2e}-1 \; =$$

$$= \; \frac{n}{e}-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}+\frac{2n}{2(2n-1+3e)}-\frac{(2n-1+3e)}{2(2n-1+3e)} \; = \; \frac{n}{e}-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}+\frac{1-3e}{4n-2+6e}$$

Luego:

$$\boxed{I(n) \; := \; \frac{n}{e}-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}+\frac{1-3e}{-2+6e+4n} \; < \; k_n} \tag{4.10}$$

Por lo tanto, el umbral óptimo está acotado inferiormente por la función $I(n)$. Sin embargo, al igual que ha ocurrido antes, todavía queda por demostrar el paso del desarrollo marcado con $(**)$. El procedimiento para demostrarlo es análogo al anterior y, de nuevo, se utilizará un valor cualquiera del umbral, s, en lugar del umbral óptimo, k_n. Así, la expresión a demostrar queda de la siguiente forma:

$$\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{i} \; = \; \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+...+\frac{1}{n-1} \; > \int_s^n \frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right) \tag{4.11}$$

Supóngase que para $n = s+1$ se cumple la desigualdad (4.11), es decir:

$$\frac{1}{s} \; > \int_s^{s+1}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2s}-\frac{1}{2(s+1)} = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right)+\frac{1}{2s}-\frac{1}{2(s+1)}, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.12}$$

Entonces, $\forall\, i = s, s+1, ..., n-1$ también se cumplirá:

$$\frac{1}{i} \; > \int_i^{i+1}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2i}-\frac{1}{2(i+1)} \tag{4.13}$$

Por lo tanto, si $n \geq s+1$ se tiene:

$$\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{i} \; > \; \sum_{i=s}^{n-1}\left(\int_i^{i+1}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2i}-\frac{1}{2(i+1)}\right) \; =$$

$$= \; \sum_{i=s}^{n-1}\int_i^{i+1}\frac{dx}{x} \; + \; \sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{2i} \; - \; \sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{2(i+1)} \; = \; \int_s^n\frac{dx}{x}+\frac{1}{2s}-\frac{1}{2n}$$

De esta forma, queda demostrada la expresión (4.11). Finalmente, se comprueba que la hipótesis inicial (4.12) es cierta. Para ello, se comprobará equivalentemente que:

$$g(s) = \frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+1)}-\ln\left(\frac{s+1}{s}\right) > 0, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.14}$$

Tal y como ocurría con la función $f(s)$, la desigualdad (4.14) se consigue probar sin más que estudiando la monotonía, convexidad y el límite de la función $g(s)$. En efecto:

1. La función $g(s)$ es decreciente en el intervalo $[1, +\infty)$ ya que:

$$g'(s) = \frac{-1}{2s^2(s+1)^2} < 0, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.15}$$

2. La función $g(s)$ es convexa en el intervalo $[1, +\infty)$ ya que:

$$g''(s) = \frac{2s+1}{s^3(s+1)^3} > 0, \quad \forall\, s \geq 1 \tag{4.16}$$

3. $\lim\limits_{s \to +\infty} g(s) = 0$.

Luego la proposición queda demostrada. $\square$

A continuación, se enuncian otras dos proposiciones cuyas demostraciones son inmediatas a partir de la Proposición (4.1) y teniendo en cuenta que k_n es un entero.

Proposición 4.2 *Dado el Problema de la Secretaria con n objetos en total, si k_n es el umbral óptimo, entonces:*

$$\lceil I(n) \rceil \leq k_n \leq \lfloor S(n) \rfloor \tag{4.17}$$

Proposición 4.3 *Si $\lceil I(n) \rceil = \lfloor S(n) \rfloor$, entonces $k_n = \lfloor S(n) \rfloor$.*

Sin más que calcular la diferencia entre las cotas superior e inferior, se obtiene la longitud del intervalo al que pertenece k_n, cuyo valor es:

$$1 + \frac{1.78871}{3.57742 + n} \tag{4.18}$$

Como se puede observar, el intervalo tiene una longitud poco mayor que 1, y tiende a 1 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, en la mayoría de los casos, dicho intervalo contendrá un único entero y, por ello, se podrá aplicar la Proposición (4.3), es decir, $k_n = \lfloor S(n) \rfloor$.

El problema aparece cuando el intervalo contiene dos enteros, dado que en ese caso no se sabe cuál de ellos es el valor que toma k_n. Gilbert y Mosteller indicaron que $k_n = \lfloor S(n) \rfloor$ para todos los n desde 1 hasta 100 con la única excepción de $n = 97$. La búsqueda de estas excepciones se agiliza puesto que sólo pueden darse cuando hay dos enteros en el intervalo. En la siguiente tabla, se muestran los únicos valores desde $n = 1$ hasta $n = 100$ para los cuales $\lceil I(n) \rceil \neq \lfloor S(n) \rfloor$:

n	$\lceil I(n) \rceil$	$\lfloor S(n) \rfloor$	k_n
2	0	1	0 ó 1
5	1	2	2
13	4	5	5
21	7	8	8
40	14	15	15
59	21	22	22
78	28	29	29
97	35	36	35

Cuadro 4.1: Valores de n desde 1 hasta 100 para los cuales $\lceil I(n) \rceil \neq \lfloor S(n) \rfloor$.

Efectivamente, $n = 97$ es el único valor para el que no se cumple que $k_n = \lfloor S(n) \rfloor$. El profesor José María Grau Ribas, director de este trabajo, ha registrado la sucesión A306480 en la enciclopedia online de sucesiones (OEIS) que incluye las siguientes excepciones:

$$\begin{array}{r} 97 \\ 24586 \\ 14122865 \\ 14437880866 \\ 23075113325617 \\ 53123288947296842 \\ 166496860519928411041 \\ 681661051602157413173890 \\ 3532450008306093939076231361 \\ 22600996284275635202947629995722 \\ 174979114331029936735527491233938577 \\ 1612273088535187752419835130130200398626 \end{array}$$

Capítulo 5

Solución mediante el Teorema de Bruss

Existen muchos problemas de parada óptima en los que el objetivo es parar en el último éxito de una determinada secuencia, es decir, en el último elemento que satisfaga un criterio específico. El Problema de la Secretaria puede ser interpretado como un problema de este tipo, ya que seleccionar al mejor candidato es equivalente a pararse en el último objeto maximal. A continuación, se enuncia el problema de último éxito de un modo general:

> Sean I_1, I_2, ... , I_n funciones indicadoras[1] de sucesos independientes A_1, A_2, ... , A_n, definidas en un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Se observan I_1, I_2, ... secuencialmente y se puede parar en cualquiera de ellas, pero no se puede volver atrás. Si $I_k = 1$, se dirá que k representa un éxito. Se denota por $\mathscr{T}$ el conjunto de todas las reglas t tales que $\{t = k\} \in \sigma(I_1, I_2, ..., I_k)$, la σ-álgebra generada por I_1, I_2, ... , I_k. Se quiere encontrar la regla óptima para parar en el último éxito, esto es, la regla de parada $\tau_n \in \mathscr{T}$ que maximice $P(I_t = 1; I_{t+1} = I_{t+2} = ... = I_n = 0)$.

5.1. Teorema de Bruss

El matemático Franz Thomas Bruss, profesor en la Universidad Libre de Bruselas (ULB), ha realizado importantes aportaciones al campo de la probabilidad. Entre ellas, se encuentra el *Odds-Theorem* (Teorema de Probabilidades en español), que establece la regla de parada óptima del problema anterior, así como la correspondiente probabilidad de éxito. El enunciado y la demostración de dicho teorema aparecen en [4] y se exponen a continuación:

[1] Variables aleatorias con distribución de Bernoulli, $B(p_i)$.

Teorema 5.1 *Sea I_1, I_2, ... , I_n una secuencia de n variables aleatorias independientes con distribución de Bernoulli (siendo n un dato conocido). Se denota por p_j (con $j = 1, ..., n$) el parámetro de I_j, es decir, $p_j = P(I_j = 1)$. Sea $q_j = 1 - p_j$ y $r_j = p_j/q_j$. Se define el índice s de la siguiente manera:*

$$s = \begin{cases} \max\left\{1 \leq k \leq n : \sum_{j=k}^{n} r_j \geq 1\right\}, & si\ \sum_{j=1}^{n} r_j \geq 1 \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{5.1}$$

Entonces, la regla óptima τ_n para parar en el último éxito consiste en parar en el primer índice k (si lo hay) con $I_k = 1$ y $k \geq s$, es decir, parar en el primer 1 que aparezca entre las variables I_s, I_{s+1}, ... , I_n. Además, la probabilidad de éxito viene dada por:

$$V(n) = \left(\prod_{j=s}^{n} q_j\right)\left(\sum_{i=s}^{n} r_i\right) \tag{5.2}$$

Demostración:

En primer lugar, se considerará el caso en el que $p_j < 1 \quad \forall j = 1, 2, ..., n$. Sean $g_j(t)$ y $G_k(t)$ las funciones generadoras de probabilidad correspondientes a I_j y $S_k := I_{k+1} + I_{k+2} + ... + I_n$, respectivamente. Debido a la independencia de las funciones I_k, se tiene que:

$$g_j(t) = \sum_{x=0}^{1} p(x)\ t^x = p(0) + p(1)\ t = q_j + p_j\ t \tag{5.3}$$

$$G_k(t) = g_{k+1}(t)\ g_{k+2}(t) \ldots g_n(t) = \prod_{j=k+1}^{n} (q_j + p_j\ t) = \prod_{j=k+1}^{n} q_j\,(1 + r_j\ t) \tag{5.4}$$

A continuación, se aplica la función logaritmo neperiano a la igualdad (5.4) y se deriva, obteniendo el siguiente resultado:

$$\frac{G'_k(t)}{G_k(t)} = \sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{r_j}{1 + r_j\ t}\right) \tag{5.5}$$

Por otro lado, para una variable aleatoria X cualquiera, se sabe que su función de probabilidad se puede expresar a partir de la derivada k-ésima de su función generadora de probabilidad como sigue:

$$P(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} \tag{5.6}$$

Por lo tanto, haciendo uso de esta propiedad y de las expresiones (5.4) y (5.5), se llega a la siguiente igualdad:

$$P(S_k = 1) = G'_k(0) = \left(\prod_{j=k+1}^{n} q_j\right)\left(\sum_{j=k+1}^{n} r_j\right) \tag{5.7}$$

Dado que se está suponiendo que $p_j < 1 \;\; \forall j = 1, 2, ..., n$, se cumple entonces que $G_k(0) > 0$. Considérese ahora el subconjunto $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$ de reglas que paran en el primer éxito (si lo hay) después de un índice fijado k. Por lo tanto, si se aplica una regla $t \in \mathscr{C}$, se parará en el último éxito y, consecuentemente, se conseguirá el objetivo, si y sólo si $S_t = 1$. Por ello, se desea buscar el índice k^* que maximiza la ecuación (5.7). Este valor k^* es único ya que $P\left(S_k = 1\right)$ es una función unimodal en k. Para comprobar esto, supóngase en primer lugar que $r_2 + r_3 + ... + r_n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
P\left(S_k = 1\right) < P\left(S_{k+1} = 1\right) &\overset{(5.7)}{\iff} \prod_{j=k+1}^{n} q_j \sum_{j=k+1}^{n} r_j < \prod_{j=k+2}^{n} q_j \sum_{j=k+2}^{n} r_j \\
\Leftrightarrow \;\; q_{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} r_j < \sum_{j=k+2}^{n} r_j \;\; &\Leftrightarrow \;\; q_{k+1}\, r_{k+1} < \left(1 - q_{k+1}\right) \sum_{j=k+2}^{n} r_j \\
\Leftrightarrow \;\; p_{k+1} < p_{k+1} \sum_{j=k+2}^{n} r_j \;\; &\Leftrightarrow \;\; 1 < \sum_{j=k+2}^{n} r_j
\end{aligned}
$$

La suma de los r_j es monótona decreciente en k. Por lo tanto, en el momento en el que esa suma deje de ser mayor que 1 debido a incrementar k, la desigualdad cambiará de sentido, es decir, $P\left(S_{k^*} = 1\right) \geq P\left(S_{k^*+1} = 1\right) \geq ... \geq P\left(S_{n-1} = 1\right)$. Consecuentemente, existe un único valor para k^*, y la regla de parada óptima τ_n consiste en parar en el primer éxito (si lo hay) después de k^*, es decir, desde $s = k^* + 1$ en adelante.

Para el caso en el que $r_2 + r_3 + ... + r_n < 1$, el resultado sigue siendo cierto y k^* tomará el valor $k^* = 0$, es decir, la regla de parada óptima consiste en parar en el primer éxito que aparezca en la secuencia.

La probabilidad de éxito utilizando la estrategia óptima es:

$$
V\left(n\right) = P\left(S_{k^*} = 1\right) = \left(\prod_{m=s}^{n} q_m\right)\left(\sum_{j=s}^{n} r_j\right) \tag{5.8}
$$

Por último, considérese el caso en el que existe $p_j = 1$ para cierto $1 \leq j \leq n$. Si $p_n = 1$, es obvio que la estrategia óptima sería parar en n. Esto está en concordancia con la regla de parada definida por el teorema, ya que $r_n = \infty$, por lo que $s = n$. Por el contrario, si $p_n < 1$, entonces se define j^* como el último índice $1 \leq j < n$ tal que $p_j = 1$. Por lo tanto, $p_{j^*+1} < 1, \; ... \; , p_n < 1$, así que puede darse una de las dos situaciones siguientes:

- Si $s \geq j^* + 1$, entonces se está de nuevo en el primer caso (en el que $p_j < 1 \; \forall j$).
- Si $s \leq j^*$, entonces se perdería con probabilidad total si se parase en algún $j < j^*$. Por lo tanto, se debe parar en j^*.

Luego el teorema queda demostrado. □

Por lo tanto, la idea del teorema es clara: el umbral s es quien determina si se debe seleccionar la variable que está siendo observada (siempre y cuando tome el valor 1) o, por el contrario, se debe seguir esperando. El valor de s depende de la probabilidad p_j de cada una de las variables I_j. De este modo, si los parámetros p_j son muy pequeños (es decir, es muy poco probable que se produzcan éxitos), la estrategia óptima obligará desde el primer momento a seleccionar el primer éxito que aparezca en la secuencia. En cambio, si los parámetros p_j toman valores más grandes, entonces la probabilidad de que haya éxitos a lo largo de la secuencia es mayor y, por ello, no será necesario escoger el primero de todos, sino que se podrá esperar hasta el objeto s y, a partir de él, seleccionar el primer éxito que aparezca (si lo hay). Por último, si el valor de p_n es relativamente grande (con ser superior a 0.5 es suficiente), la estrategia óptima será esperar hasta el último objeto de todos y escogerlo en el caso de que efectivamente sea un éxito.

Por último, el Teorema de Bruss permite implementar un algoritmo para resolver el problema de último éxito. El procedimiento que se debe llevar a cabo para encontrar la regla de parada óptima y la probabilidad de éxito de dicho problema es el siguiente:

1. En orden inverso (es decir, desde $j = n$ hasta $j = 1$), calcular $q_j = 1 - p_j$, $r_j = p_j/q_j$, y las cantidades $Q_k := q_n\, q_{n-1} \dots q_k$ y $R_k := r_n + r_{n-1} + \dots + r_k$. Parar cuando R_k alcance o sobrepase la unidad, o cuando $k = 1$, lo que ocurra antes. Este valor de k será el índice s, es decir, el momento a partir del cual se debe parar en el primer éxito que aparezca.
2. Calcular $V(n) := Q_s\, R_s$, es decir, la probabilidad de éxito.

5.2. Aplicación al SP

Como se ha mencionado al comienzo del presente capítulo, el Problema de la Secretaria es un ejemplo de problema de último éxito, donde la palabra "éxito" hace referencia a un objeto maximal.

De este modo, a cada objeto se le asigna una variable aleatoria I_k con distribución de Bernoulli de parámetro p_k, es decir, $I_k \equiv B(p_k)$. Estas variables son independientes unas de otras. Como es sabido, $p_k = 1/k$ ya que la probabilidad de que el objeto k-ésimo sea maximal es la probabilidad de que el mejor de los primeros k-ésimos objetos esté en la posición k. Por lo tanto, la variable I_k tomará el valor 1 si el objeto k-ésimo es mejor que todos los anteriores y 0 en caso contrario. El objetivo es encontrar el mejor objeto de todos, lo que es equivalente a encontrar el último éxito.

Dado que $p_k = 1/k$, se tiene que $q_k = (k-1)/k$ y $r_k = 1/(k-1)$. De este modo, $R_s = 1/(n-1) + 1/(n-2) + \dots + 1/(s-1)$ y $Q_s = (n-1)/n \dots (s-1)/s = (s-1)/n$.

A continuación, se muestra un programa realizado en *Matlab* en el que se implementa el algoritmo de Bruss para resolver el Problema de la Secretaria:

```
% Resolución del SP como un problema de último éxito mediante el
% Odds−algorithm:

n = input('Objetos:\');         % Número de objetos en total

k = n:−1:1;                     % Posibles valores del umbral s
s = 1;                          % Mínimo valor que puede tomar s
Q = 1;                          % Inicializo Q en 1
R = 0;                          % Inicializo R en 0

% Cálculo del umbral s:

for j = k

    p = 1/j; q = 1−p; r = p/q;
    Q = Q*q; R = R+r;

    if R >= 1
        s = j;
        break
    end

end

% Cálculo de la probabilidad de éxito:

V = Q*R;
```

Como puede verse, se trata de un programa muy sencillo que lo único que hace es calcular las variables definidas en el algoritmo de Bruss para cada posible valor de k mediante un proceso iterativo. Debido a su simplicidad, este programa es mucho más eficiente que el mostrado en el Capítulo 3 para resolver el Problema de la Secretaria.

La siguiente tabla recoge los valores del umbral y de la probabilidad de éxito para diferentes valores de n:

n	s	V		n	s	V
1	1	1		**20**	8	0.3842
2	1 ó 2	0.5		**30**	12	0.3787
3	2	0.5		**40**	16	0.3757
4	2	0.4583		**50**	19	0.3743
5	3	0.4333		**60**	23	0.3732
6	3	0.4278		**70**	27	0.3724
7	3	0.4143		**80**	30	0.3719
8	4	0.4098		**90**	34	0.3714
9	4	0.4060		**100**	38	0.3710
10	4	0.3987		**1000**	369	0.3682
15	6	0.3894		**10000**	3680	0.3679

Cuadro 5.1: Valores de s y V para diferentes valores de n.

Como era de esperar, los resultados obtenidos utilizando el Teorema de Bruss son los mismos que los obtenidos en el Capítulo 3 y que se recogen en la tabla (3.1), con la única diferencia de que el nuevo umbral es una unidad superior que el antiguo, es decir, $s = k_n + 1$. Esto es razonable puesto que el umbral s del Teorema de Bruss representa el primer objeto que podría ser elegido, mientras que el umbral k_n que se obtuvo al estudiar en qué consistía la estrategia óptima del SP representa el último objeto que se rechaza de manera automática.

En conclusión, el Problema de la Secretaria pertenece a una categoría más amplia como son los problemas de último éxito, que pueden ser resueltos aplicando el Teorema de Bruss. Para ello, basta con conocer la probabilidad p_k de que el elemento k-ésimo sea un éxito (que en el caso del SP es $p_k = 1/k$). De esta forma, se consigue resolver el problema de una forma muy sencilla y que computacionalmente es muy eficiente.

Capítulo 6

Monotonía del umbral óptimo y de la probabilidad de éxito

En el apartado "Resultados numéricos" del Capítulo 3, se habló brevemente sobre la monotonía del umbral óptimo y de la probabilidad de éxito. A partir de los resultados obtenidos de k_n y P_n para diferentes valores de n recogidos en la tabla (3.1), se dedujo que la sucesión formada por los umbrales óptimos es monótona creciente, mientras que la sucesión formada por las probabilidades de éxito es monótona decreciente. Además, se observó que $P_2 = P_3$ y que k_2 no es único, sino que puede tomar los valores 0 ó 1.

Sin embargo, con los datos mostrados en la tabla (3.1) no se puede saber si hay otros valores de n para los que $P_n = P_{n+1}$ o si el correspondiente k_n puede tomar varios valores. En este capítulo, se van a estudiar varios teoremas para tratar todos estos aspectos de una manera formal.

6.1. Monotonía del umbral óptimo

En primer lugar, se va a enunciar un teorema que, si bien no trata sobre la monotonía de los umbrales óptimos, es muy importante ya que prueba que $n = 2$ es el único caso en el que el umbral óptimo puede tomar más de un valor.

Teorema 6.1 *Para $n > 2$, el umbral óptimo es único.*

Demostración:

Sea n un cierto número de elementos y k_n el umbral óptimo. Supóngase que k_n no es único, sino que $k_n + 1$ también lo es. Esto supone lo siguiente:

- Como k_n es umbral óptimo, es el último elemento que se rechaza automáticamente, luego $k_n + 1$ es el primer elemento que puede ser escogido.
- Sin embargo, si se utilizara como umbral óptimo $k_n + 1$, este elemento sería rechazado.

Por lo tanto, dado que en una situación $k_n + 1$ puede ser elegido, mientras que en la otra es rechazado, esto significa que la probabilidad de tener éxito cuando se acepta dicho objeto es la misma que cuando se rechaza, es decir:

$$P_n^A(k_n + 1) = P_n^R(k_n + 1) \tag{6.1}$$

Luego:

$$P_n^A(k_n + 1) \ = \ \frac{k_n + 1}{n} \ = \ \frac{k_n + 1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-1} \frac{1}{i} \ = \ P_n^R(k_n + 1) \ \Rightarrow \sum_{i=k_n+1}^{n-1} \frac{1}{i} \ = \ 1$$

Sin embargo, la suma de inversos de naturales consecutivos nunca es entera, con la excepción de:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} \ = \ 1 \tag{6.2}$$

Consecuentemente, para $n = 2$ y $k_n = 0$ se tiene la igualdad (6.2), de manera que $k_n + 1 = 1$ también es umbral óptimo. Por el contrario, para $n > 2$ no es posible obtener la igualdad (6.2), así que la hipótesis de partida no es cierta y, por lo tanto, el umbral óptimo es único.

Luego el teorema queda demostrado. □

A continuación, se va a enunciar y demostrar el teorema que corrobora que la sucesión formada por los umbrales óptimos es monótona creciente.

Teorema 6.2 *Se cumple que $k_{n+1} \subset \{k_n, k_n + 1\}$ y, por lo tanto, $k_n \leq k_{n+1}$.*

Demostración:

En primer lugar, se demuestra que $k_n \leq k_{n+1}$. Para ello, basta con usar la definición de umbral óptimo:

$$k_n \ = \ máx \left\{ k : 1 \leq \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1} \right\} \ \leq \ máx \left\{ k : 1 \leq \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{1}{i-1} \right\} \ = \ k_{n+1}$$

Falta por probar que k_{n+1} no puede ser mayor que $k_n + 1$, sino que solamente están permitidos los valores k_n y $k_n + 1$. Utilizando de nuevo la definición de umbral óptimo, se deduce que:

$$\sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} \ \geq \ 1 \ > \ \sum_{i=k_n+2}^{n} \frac{1}{i-1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k_n+2}^{n} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} - \frac{1}{k_n} < 1 \tag{6.3}$$

Entonces, hay dos posibilidades al pasar de n a $n+1$, dependiendo del valor que tome la siguiente expresión:

$$\sum_{i=k_n+2}^{n+1} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} - \frac{1}{k_n} + \frac{1}{n} \tag{6.4}$$

- Si la expresión (6.4) es menor que 1:

$$\sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=k_n+1}^{n+1} \frac{1}{i-1} \geq 1 > \sum_{i=k_n+2}^{n+1} \frac{1}{i-1} \Rightarrow k_{n+1} = k_n$$

- Si la expresión (6.4) es mayor o igual que 1, entonces $k_{n+1} \geq k_n + 1$. Quedaría por verificar si es posible que $k_{n+1} > k_n + 1$. Para ello, se va a comprobar si $k_{n+1} = k_n + 2$:

$$\sum_{i=k_n+3}^{n+1} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=k_n+1}^{n} \frac{1}{i-1} - \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_n+1} + \frac{1}{n} \overset{(6.3)}{<} 1$$

  De esta forma, $k_{n+1} \neq k_n + 2$ y tampoco puede ser ningún valor superior por el mismo motivo, concluyéndose que $k_{n+1} = k_n + 1$.

Luego el teorema queda demostrado. □

Por lo tanto, la sucesión formada por los umbrales óptimos es monótona creciente como ya se intuía. A continuación, se representa gráficamente los valores del umbral óptimo desde $n = 1$ hasta $n = 40$:

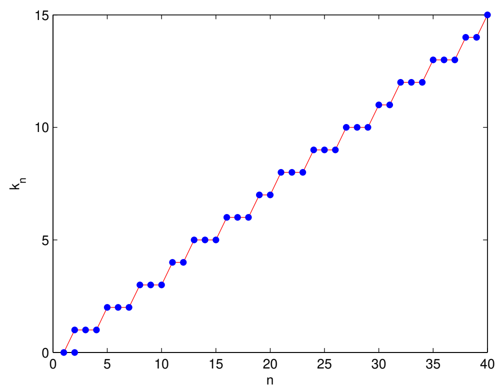

Figura 6.1: Umbrales óptimos para los 40 primeros valores de n.

Como se puede observar, la gráfica tiene un aspecto similar a una función escalonada. Los valores de k_n parecen seguir el patrón: 3 - 3 - 3 - 2 - 3 - 3 - 2. Así, por ejemplo, los valores $k_n = 1, 2, 3$ están repetidos tres veces cada uno, mientras que $k_n = 4$ sólo se repite dos veces; luego, $k_n = 5$ y $k_n = 6$ de nuevo se repiten tres veces; por último, el valor $k_n = 7$ se repite 2 veces.

Este patrón se sigue cumpliendo para los siguientes valores de k_n. Sin embargo, presenta una serie de excepciones, localizadas en aquellos n para los que el correspondiente k_n cumple que $\lceil I(n) \rceil = k_n \neq \lfloor S(n) \rfloor$ (mostradas al término del Capítulo 4).

6.2. Monotonía de la probabilidad de éxito

El siguiente teorema afirma que la sucesión formada por las probabilidades de éxito es monótona decreciente. Dicho teorema se demuestra de dos maneras distintas, siendo la segunda demostración más elegante que la primera.

Teorema 6.3 *Se cumple que* $P_n \geq P_{n+1}$.

Demostración 1:

Se procede por reducción al absurdo. Supóngase que $P_{n+1} > P_n$:

$$P_n \;=\; \frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;<\; \frac{k_{n+1}}{n+1} \sum_{k=k_{n+1}}^{n} \frac{1}{k} \;=\; P_{n+1} \tag{6.5}$$

Además, dado que k_n es el umbral óptimo con n elementos, se cumple que:

$$\sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;\geq\; 1 \;>\; \sum_{k=k_n+1}^{n-1} \frac{1}{k} \;:=\; R \tag{6.6}$$

Por el teorema anterior, se sabe que $k_{n+1} \subset \{k_n, k_n + 1\}$. Por lo tanto, según el valor que tome, la desigualdad (6.5) se podrá escribir de una de las dos formas siguientes:

- Si $k_{n+1} = k_n$:

$$\frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;<\; \frac{k_n}{n+1} \sum_{k=k_n}^{n} \frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{n} \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;<\; \sum_{k=k_n}^{n} \frac{1}{k} \;=\; \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\; (n+1) \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;<\; n \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;<\; 1 \qquad \# \text{ con } (6.6)$$

- Si $k_{n+1} = k_n + 1$:

$$\frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \;<\; \frac{k_n+1}{n+1} \sum_{k=k_n+1}^{n} \frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \frac{k_n}{n}\left(R + \frac{1}{k_n}\right) \;<\; \frac{k_n+1}{n+1}\left(R + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\ (n+1)\,(k_nR+1)\ <\ (k_n+1)\,(nR+1)\ \Rightarrow\ nk_nR+n+k_nR+1\ <$$
$$<\ k_nnR+k_n+nR+1\ \Rightarrow\ n+k_nR\ <\ k_n+nR\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ n-k_n\ <\ R\,(n-k_n)\ \Rightarrow\ R\ >\ 1 \qquad \#\text{ con (6.6)}$$

Luego el teorema queda demostrado. □

Demostración 2:

Se procede de nuevo por reducción al absurdo. Supóngase que $P_{n+1} > P_n$. Considérese ahora el problema auxiliar en el que se tiene $n+1$ objetos y se conoce la posición en la que se encuentra el peor de todos. Denotando por P^* la probabilidad de éxito de este problema auxiliar, se cumple que $P^* \geq P_{n+1}$, ya que el hecho de tener información adicional no puede disminuir la probabilidad de éxito (como mínimo, se tendrá que $P^* = P_{n+1}$, que es el caso en el que conocer la posición del peor objeto no aporta ninguna información relevante para encontrar el mejor, es decir, cuando los sucesos son independientes).

Pero el problema auxiliar ignorando el peor objeto es al fin y al cabo el Problema de la Secretaria con n objetos, de modo que $P^* = P_n$. Por lo tanto, se llega a la siguiente contradicción:

$$P_n < P_{n+1} \leq P^* = P_n \Rightarrow P_n < P_n \qquad \#$$

Luego el teorema queda demostrado. □

En conclusión, se ha probado que la probabilidad de éxito P_n es decreciente en función del número de objetos n. Pues bien, el siguiente teorema va más allá, afirmando que para $n > 2$ es estrictamente decreciente, mientas que la igualdad entre P_n y P_{n+1} sólo ocurre para $n = 2$.

Teorema 6.4 *Para todo $n > 2$, se cumple que $P_n > P_{n+1}$, y para $n = 2$ se tiene que $P_2 = P_3 = \frac{1}{2}$.*

Demostración:

Una vez más, se procede por reducción al absurdo. Supóngase que $P_n = P_{n+1}$ con $n > 2$:

$$P_n\ =\ \frac{k_n}{n}\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k}\ =\ \frac{k_{n+1}}{n+1}\sum_{k=k_{n+1}}^{n}\frac{1}{k}\ =\ P_{n+1} \tag{6.7}$$

Por el Teorema (6.2), sólo hay dos posibles valores para k_{n+1}:

- Si $k_{n+1} = k_n$:

$$P_n\ =\ \frac{k_n}{n}\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k}\ =\ \frac{k_n}{n+1}\sum_{k=k_n}^{n}\frac{1}{k}\ =\ P_{n+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (n+1)\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ n\sum_{k=k_n}^{n}\frac{1}{k} \ \Rightarrow \ (n+1)\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ n\left(\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ (n+1)\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ n\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k}+1 \ \Rightarrow \ \sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ 1 \quad \#$$

Como ya se ha dicho anteriormente, la suma de inversos de naturales consecutivos nunca es entera, con la excepción de:

$$\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{i} \ = \ 1 \tag{6.8}$$

Por lo tanto, para $n > 2$ nunca se obtiene la igualdad (6.8) y de ahí la contradicción.

- Si $k_{n+1} = k_n + 1$:

$$P_n \ = \ \frac{k_n}{n}\sum_{k=k_n}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ \frac{k_n+1}{n+1}\sum_{k=k_n+1}^{n}\frac{1}{k} \ = \ P_{n+1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{k_n}{n}\left[\sum_{k=k_n+1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{k_n}\right] \ = \ \frac{k_n+1}{n+1}\left[\sum_{k=k_n+1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (nk_n+k_n)\left[\sum_{k=k_n+1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{k_n}\right] \ = \ (nk_n+n)\left[\sum_{k=k_n+1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right]$$

Sin más que desarrollando y simplificando términos, se obtiene:

$$(n-k_n)\sum_{k=k_n+1}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ n-k_n \ \Rightarrow \ \sum_{k=k_n+1}^{n-1}\frac{1}{k} \ = \ 1 \quad \#$$

De esta forma, se llega a la misma contradicción que en el caso anterior.

Por último, se estudia el caso $n = 2$. Sabiendo que $k_2 = k_3 = 1$:

$$P_2 \ = \ \frac{k_2}{2}\sum_{k=k_2}^{2-1}\frac{1}{k} \ = \ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} \ = \ \frac{1}{2} \tag{6.9}$$

$$P_3 \ = \ \frac{k_3}{3}\sum_{k=k_3}^{3-1}\frac{1}{k} \ = \ \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k} \ = \ \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) \ = \ \frac{1}{2} \tag{6.10}$$

Luego el teorema queda demostrado. □

Por lo tanto, la sucesión formada por las probabilidades de éxito es decreciente y, a partir de $n = 3$, es estrictamente decreciente. Como ya se comentó en el Capítulo 3, parece lógico que P_n disminuya al aumentar n, dado que tener más elementos implica mayor dificultad a la hora de encontrar al mejor de todos.

A continuación, se representa gráficamente los valores de la probabilidad de éxito desde $n = 2$ hasta $n = 40$:

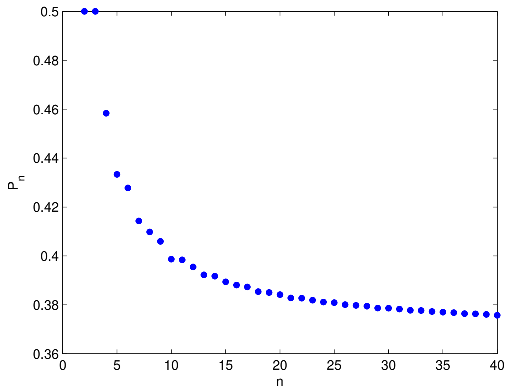

Figura 6.2: Probabilidades de éxito hasta $n = 40$.

Así pues, puede comprobarse lo que afirma el Teorema (6.4): la probabilidad de éxito P_n toma el valor $1/2$ para $n = 2$ y $n = 3$, y para $n \geq 3$ es estrictamente decreciente. Para valores pequeños de n, P_n decrece rápidamente, pero a medida que aumenta el número de elementos, el decrecimiento es mucho más lento. Por otro lado, el valor $P_1 = 1$ no se aprecia en la gráfica.

Finalmente, se representa gráficamente la probabilidad de éxito en función del umbral para diferentes valores de n:

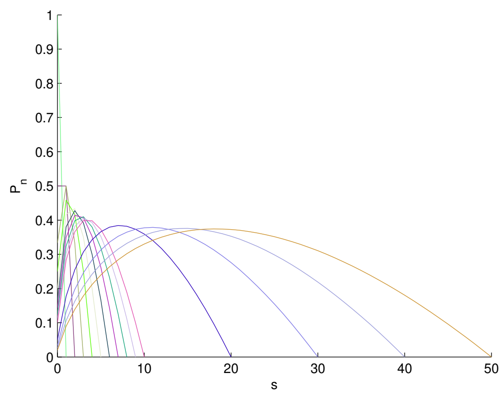

Figura 6.3: Probabilidad de éxito en función del umbral utilizado.

Se trata de la misma gráfica que la mostrada en la figura (3.3), sólo que en esta ocasión se está haciendo la representación para diferentes valores de n al mismo tiempo. Recuérdese que la probabilidad de éxito en función del umbral s alcanza el máximo en el umbral óptimo k_n. Consecuentemente, en esta imagen puede observarse la monotonía tanto del umbral óptimo como de la probabilidad de éxito:

1. A medida que n aumenta, el máximo de P_n se encuentra más a la derecha, por lo que efectivamente la sucesión formada por los umbrales óptimos k_n es creciente.
2. Por su parte, la altura de las funciones y, por ello, el máximo valor que toma P_n, va disminuyendo conforme aumenta n, por lo que la sucesión formada por las probabilidades de éxito es decreciente.

La gráfica anterior se puede representar alternativamente en 3 dimensiones, obteniéndose lo siguiente:

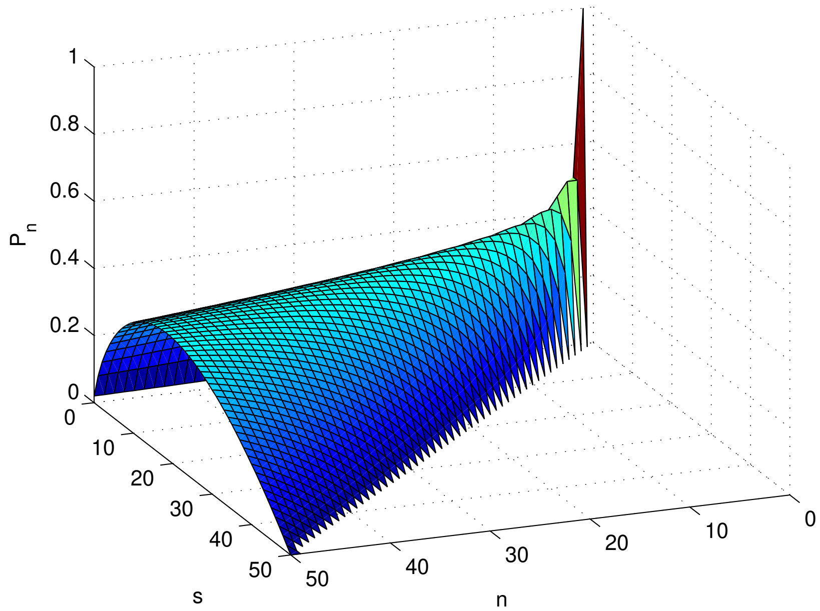

Figura 6.4: Probabilidad de éxito en función del umbral y del número de objetos.

Capítulo 7

Solución asintótica

Una vez que se ha estudiado la monotonía tanto de la sucesión formada por los umbrales óptimos como la formada por las probabilidades de éxito, se continuará el trabajo estudiando la convergencia de ambas sucesiones. En el apartado "Resultados numéricos" del Capítulo 3, se comentó que los límites de P_n y k_n parecían ser $1/e$ y n/e, respectivamente. Por lo tanto, en este capítulo se pretende demostrar de manera formal que, en efecto, esos son los valores de los límites de las sucesiones.

Para ello, se calcularán dichos límites utilizando 3 métodos diferentes: en primer lugar, se hará uso de una aproximación no demasiado rigurosa pero que proporciona resultados correctos; posteriormente, se utilizará la acotación de Gilbert y Mosteller del umbral óptimo; y finalmente, se estudiará una tercera vía adecuada.

7.1. Números armónicos, función digamma y función W de Lambert

En los desarrollos que hay que realizar para calcular de forma rigurosa y precisa los valores asintóticos de k_n y P_n, es necesario utilizar los llamados números armónicos y dos funciones: la función digamma y la función W de Lambert. Por ello, lo primero que se va a hacer es definir estos conceptos y estudiar algunas de sus propiedades.

7.1.1. Números armónicos

Definición 7.1 *Se define el n-ésimo número armónico como la suma de los inversos de los n primeros números naturales:*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \tag{7.1}$$

A continuación, se presentan algunas propiedades interesantes de los números armónicos recogidas en [5], [6] y [7]:

Propiedad 7.1 *Salvo H_1, los números armónicos no son enteros.*

Propiedad 7.2 *Se satisface la siguiente relación de recurrencia:*

$$H_n \;=\; H_{n-1} + \frac{1}{n} \tag{7.2}$$

Propiedad 7.3 *Los números armónicos admiten la siguiente representación integral (dada por Euler):*

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx \tag{7.3}$$

Demostración:

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + ... + x^{n-1} \;\Rightarrow\; \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \int_0^1 \left(1 + x + ... + x^{n-1}\right)dx$$
$$= \left[x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = H_n \qquad \square$$

Por último, se demuestra el desarrollo asintótico de los números armónicos, obtenido por Euler en el año 1755 a partir de la fórmula de Euler-Maclaurin. Esta expresión es muy útil porque permite aproximar H_n cuando n es grande, cometiendo un error ínfimo.

Propiedad 7.4 *El desarrollo asintótico de los números armónicos es:*

$$H_n \backsim \;\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{7.4}$$

siendo $\gamma = 0.577215$ la constante de Euler-Mascheroni.

Demostración:

La expresión a demostrar se obtiene de manera directa aplicando a los números armónicos la fórmula de Euler-Maclaurin, que es la siguiente:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) \backsim \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right)$$

donde B_m son los llamados números de Bernoulli. Por lo tanto, para $f(x) = \frac{1}{x}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \backsim \int_1^n \frac{1}{x}\,dx + \frac{1+1/n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)\right) \tag{7.5}$$

La derivada k-ésima de la función $f(x)$ es:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \tag{7.6}$$

Consecuentemente:

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{2k-1} \frac{(2k-1)!}{x^{2k}} = -\frac{1}{2k} \frac{(2k)!}{x^{2k}} \tag{7.7}$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión (7.5) se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \backsim \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(-\frac{(2k)!}{2kn^{2k}} + \frac{(2k)!}{2k} \right) =$$

$$= \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} \left(1 - \frac{1}{n^{2k}} \right) =$$

$$= \ln n + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k}$$

Teniéndose en cuenta que la constante de Euler-Mascheroni es la suma de los dos últimos términos de la expresión anterior, se puede escribir:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \backsim \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} \tag{7.8}$$

Finalmente, dado que $B_2 = 1/6$ y $B_4 = -1/30$, se obtiene:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \backsim \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \qquad \square$$

A partir de la propiedad anterior de los números armónicos, se deduce que $\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n)$ y, por lo tanto, que H_n tiende a $\gamma + \ln(x)$, como se puede apreciar en la siguiente gráfica:

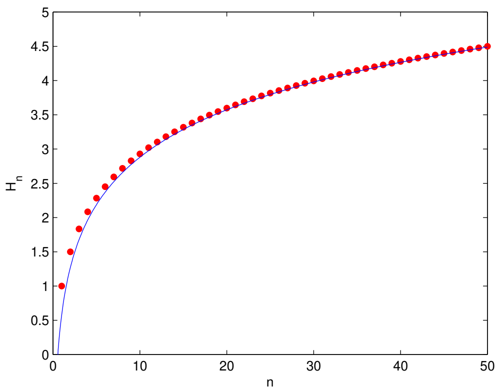

Figura 7.1: Números armónicos y su límite asintótico $\gamma + \ln(x)$.

7.1.2. Función digamma

Definición 7.2 *Se define la función digamma como la derivada logarítmica de la función gamma, es decir:*

$$\psi(z) \;=\; \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{7.9}$$

A continuación, se presentan algunas propiedades interesantes de la función digamma recogidas en [8]:

Propiedad 7.5 *Se satisface la siguiente relación de recurrencia:*

$$\psi(z+1) \;=\; \psi(z)+\frac{1}{z} \tag{7.10}$$

Demostración:

La función gamma, $\Gamma(z)$, cumple la siguiente propiedad: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Sin más que aplicar la función logaritmo neperiano y derivando después, se obtiene la igualdad a demostrar:

$$\ln\Gamma(z+1) \;=\; \ln z+\ln\Gamma(z) \;\Rightarrow\; \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} \;=\; \frac{1}{z}+\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \psi(z+1) \;=\; \psi(z)+\frac{1}{z} \qquad \square$$

Propiedad 7.6 *La función digamma admite la siguiente representación en forma de serie:*

$$\psi(z+1) = -\,\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)$$

Demostración:

Se parte de la función gamma en la representación dada por Weierstrass:

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{z/k}$$

Aplicando el logaritmo neperiano y derivando después, se llega a la igualdad que se busca:

$$\ln\Gamma(z) \;=\; -\,\gamma z-\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z}{k}-\ln\left(1+\frac{z}{k}\right)\right] \;\Rightarrow$$
$$\psi(z) \;=\; \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\,\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right) = -\,\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z-1}\right)$$
$$\Rightarrow\; \psi(z+1) \;=\; -\,\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right) \qquad \square$$

Propiedad 7.7 *La función digamma admite la siguiente representación integral:*

$$\psi(z+1) \;=\; -\,\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x}\,dx \tag{7.11}$$

Demostración:

Se parte de la propiedad anterior:

$$\psi(z+1) \;=\; -\,\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z}\right) \;=$$

$$=\; -\,\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \left(x^{k-1} - x^{k+z-1}\right) dx \;=\; -\,\gamma + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{k-1} - x^{k+z-1}\right) dx$$

Desarrollando el sumatorio:

$$\psi(z+1) = -\,\gamma + \int_0^1 \left(1 + x + ... + x^{z-1}\right) dx = -\,\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^z}{1-x}\,dx \qquad \square$$

Teniéndose en cuenta las propiedades (7.3) y (7.7), se llega a la relación que existe entre los números armónicos y la función digamma, lo que permite pasar de uno de estos dos conceptos matemáticos al otro de manera sencilla.

Propiedad 7.8 *La función digamma y los números armónicos están relacionados mediante la siguiente igualdad:*

$$\psi(n+1) \;=\; -\,\gamma + H_n \tag{7.12}$$

Finalmente, se muestra la gráfica de la función digamma, $\psi(z)$, evaluada en valores reales. Obsérvese que presenta asíntotas verticales en el cero y en los enteros negativos debido a que la función gamma, $\Gamma(z)$, no está definida en estos valores.

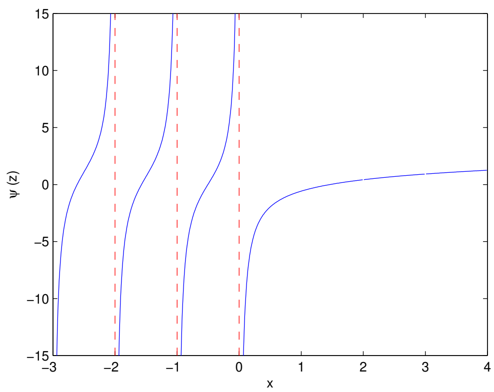

Figura 7.2: Función digamma evaluada en $\mathbb{R}$.

7.1.3. Función W de Lambert

La función W de Lambert, denominada así en honor al matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777), se define como la función inversa de $f(w) = we^w$, siendo w cualquier número complejo. Por lo tanto, también se puede definir equivalentemente como la función multivaluada W que satisface la siguiente igualdad:

$$z = W(z)\, e^{W(z)} \tag{7.13}$$

siendo z cualquier número complejo.

Esta función presenta infinitas ramas complejas denotadas por $W_k(z)$, siendo k cualquier valor entero. Si se consideran únicamente argumentos reales, la función $W(x)$ está definida sólo para $x \geq -1/e$, distinguiéndose dos ramas:

- La rama principal, $W_0(x)$, es creciente y definida en el intervalo $[-1/e, \infty)$. Se tiene que $W_0(-1/e) = -1$ y $W_0(0) = 0$.
- La rama negativa, $W_{-1}(x)$, es decreciente y definida en el intervalo $(-1/e, 0)$. Tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0$.

Se muestra a continuación la gráfica de $W(x)$:

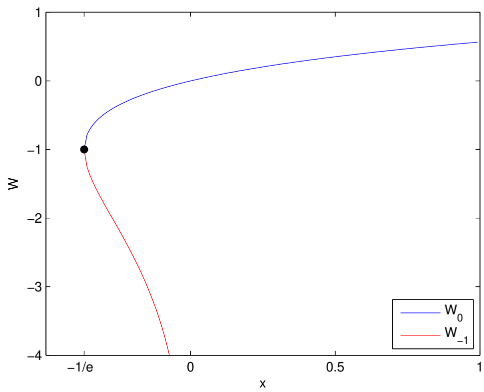

Figura 7.3: Función W de Lambert evaluada en $\mathbb{R}$.

El comportamiento de la función W de Lambert es fácil de comprender si se compara con la función inversa de e^w, el logaritmo neperiano. Para valores muy grandes del valor absoluto de w, las funciones e^w y we^w se comportan de manera similar, por lo que sus respectivas funciones inversas también lo harán. Por lo tanto, multiplicar la función exponencial por w supone deformar su gráfica principalmente alrededor de 0, de manera que aparece un mínimo en -1 y, consecuentemente, deja de ser monótona. Es por ello por lo que la función W de Lambert tiene dos ramas: una a cada lado del punto estacionario.

Que $W(x)$ tome dos valores en el intervalo $(-1/e, 0)$ significa que para todo x perteneciente a dicho intervalo, existen dos valores y tales que $ye^y = x$.

Por otro lado, la función W de Lambert admite la siguiente expansión en serie mostrada en [9]:

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!}\, x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6 + ...$$

Otra forma de obtener la expansión en serie es mediante el Teorema de inversión de Lagrange como se indica en [10], que proporciona la siguiente serie equivalente:

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\, x^n$$

Finalmente, una representación muy interesante de la rama principal $W_0(x)$ es en forma de fracción continua:

$$W_0(x) \;=\; \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{5x}{3 + \cfrac{17x}{10 + \cfrac{133x}{17 + \cfrac{1927x}{190 + \cfrac{13582711x}{94423 + \ddots}}}}}}}}$$

7.2. Regla de $[n/e]$ para el umbral óptimo

En esta sección, se va a calcular el límite del umbral óptimo utilizando una aproximación no demasiado rigurosa pero que proporciona resultados correctos. Este procedimiento aparece en [11], y en él ya se indica que no es un método demasiado adecuado. Para ello, se parte de la expresión del umbral óptimo que, como ya se vio en el Capítulo 3, es la siguiente:

$$k_n = máx \left\{ k : 1 \leq \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1} \right\} = máx \left\{ k : 1 \leq \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \right\} \tag{7.14}$$

Entonces, para encontrar el límite de k_n cuando $n \to \infty$, se aproxima el sumatorio por una integral:

$$\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \;\approx\; \int_k^n \frac{dt}{t} \tag{7.15}$$

y se busca el valor k^* para el que la integral vale 1:

$$1 \;=\; \int_{k^*}^{n} \frac{dt}{t} \;=\; \ln n - \ln k^* \;=\; \ln \frac{n}{k^*} \;\Rightarrow\; \frac{n}{k^*} \;=\; e \;\Rightarrow\; k^* = \frac{n}{e}$$

Por lo tanto, $k_n \to n/e$ cuando $n \to \infty$. Sabiendo que $e^{-1} = 0.367879$, la estrategia óptima cuando n es muy grande consiste en rechazar aproximadamente el 37 % de los candidatos y, a partir de ahí, seleccionar el primer objeto maximal que aparezca.

Se puede proceder de manera análoga para calcular el límite de la probabilidad de éxito cuando n tiende a infinito. Recuérdese que la probabilidad de éxito cuando se utiliza la estrategia óptima de umbral viene dada por:

$$P_n \;=\; \frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n+1}^{n} \frac{1}{k-1} \;=\; \frac{k_n}{n} \sum_{k=k_n}^{n-1} \frac{1}{k} \tag{7.16}$$

Denotando por x el límite de k_n/n y haciendo uso de nuevo de la aproximación (7.14), se puede escribir:

$$P_n \;=\; x \int_x^1 \frac{dt}{t} \;=\; -x \ln x \tag{7.17}$$

Pero como se acaba de probar, $k_n \to n/e$, luego $x \to e^{-1}$ y, por lo tanto, $P_n \to e^{-1}$ también. En conclusión, la estrategia óptima cuando n tiende a infinito proporciona una probabilidad de éxito cercana al 37 %.

7.3. Límite de k_n a partir de la acotación de Gilbert y Mosteller

Otra forma de obtener el límite de k_n cuando n tiende a infinito consiste en aplicar el Teorema del emparedado a la acotación de Gilbert y Mosteller del umbral óptimo. Este teorema permite determinar el límite de una función (o de una sucesión) mediante la comparación con otras dos funciones (sucesiones) cuyo límite sea conocido o fácilmente calculable. Se expone a continuación la versión para sucesiones de dicho teorema:

Teorema 7.1 *Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes a L y sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ otra sucesión de modo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces la sucesión formada por los c_n también converge a L.*

Como se vio en el Capítulo 4, el umbral óptimo está acotado inferior y superiormente por las siguientes expresiones:

$$\frac{n}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{1-3e}{-2+6e+4n} \;\leq\; k_n \;\leq\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{n}{e} \tag{7.18}$$

Sin más que dividir por n y aplicando el Teorema del emparedado, se deduce que $k_n/n \to 1/e$ cuando $n \to \infty$. Como era de esperar, se obtiene el mismo resultado que utilizando el método anterior.

7.4. Estimaciones más precisas de k_n

Por último, se va a deducir una nueva fórmula (dependiente de la función W de Lambert) para calcular el umbral óptimo del SP y que aparece en [12]. Para ello, se parte de nuevo de la expresión del umbral óptimo, que puede escribirse en función de los números armónicos de la siguiente manera:

$$k_n = \mathit{máx}\left\{k : 1 \leq \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}\right\} = \mathit{máx}\left\{k : 1 \leq H_{n-1} - H_{k-1}\right\} \tag{7.19}$$

Por lo tanto, es necesario resolver la ecuación $H_{n-1} = H_{k-1} + 1$. Esta ecuación puede escribirse en términos de la función digamma debido a la relación que existe entre ella y los números armónicos, dada por la igualdad (7.12). De esta forma, se tiene equivalentemente la ecuación $\psi(n) = \psi(k) + 1$.

Utilizando el desarrollo asintótico de los números armónicos (7.4), la ecuación anterior quedaría como se indica a continuación:

$$\ln(n-1) + \frac{1}{2(n-1)} \;=\; \ln(k-1) + \frac{1}{2(k-1)} + 1 \tag{7.20}$$

Y, por lo tanto, se procede a despejar k:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n-1}{k-1}\right) - \frac{1}{2(k-1)} \;&=\; 1 - \frac{1}{2(n-1)} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \frac{n-1}{k-1}\,\exp\left(\frac{-1}{2(k-1)}\right) \;&=\; \exp\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \frac{-1}{2(k-1)}\,\exp\left(\frac{-1}{2(k-1)}\right) \;&=\; \frac{-1}{2(n-1)}\exp\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) \end{aligned}$$

Como puede verse, se obtiene una igualdad del tipo $xe^x = y$, siendo:

$$x \;=\; \frac{-1}{2(k-1)} \tag{7.21}$$

Aplicando entonces la función W de Lambert, se obtiene x, y de ahí se puede despejar k:

$$\frac{-1}{2(k-1)} \;=\; W\left[\frac{-1}{2(n-1)}\exp\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)\right] \tag{7.22}$$

Luego:

$$k \;=\; \frac{-1}{2W\left[\frac{-1}{2(n-1)}\exp\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)\right]} \;+\; 1 \tag{7.23}$$

Tomando $\lfloor k \rfloor$, el resultado que se obtiene parece coincidir sin excepciones con el valor exacto de k_n para todo $n > 4$. De esta forma, se puede calcular de manera sencilla y directa el valor del umbral óptimo para cualquier n, por muy grande que sea.

Sin embargo, a pesar de esta coincidencia entre los valores de $\lfloor k \rfloor$ y de k_n, no es seguro que se cumpla *ad infinitum*.

Capítulo 8

Variantes del SP

Como ya se comentó en la introducción, a lo largo de los años han ido apareciendo muchas variantes del SP. Éstas pueden surgir de diversas maneras: modificando el objetivo del problema (es decir, cambiando el concepto de "éxito"), teniendo más de una posible elección para encontrar al mejor objeto, o disponiendo de algún tipo de información sobre la distribución que siguen los elementos, entre otras posibilidades. Por lo tanto, se podrían generar tantas variantes del SP como permita la capacidad imaginativa.

En este último capítulo, se van a estudiar en detalle algunas de estas variantes. Concretamente, se tratarán las siguientes: variante *POSTDOC* y con empleo incierto.

8.1. Variante *POSTDOC*

Esta variante del SP consiste en seleccionar el segundo mejor objeto en lugar del mejor de todos. El matemático estadounidense Robert J. Vanderbei, profesor en la Universidad de Princeton, resolvió en [13] este problema en el año 1983. En [14] también se estudia esta variante.

Sea n el número de objetos en total. Al igual que en la versión tradicional del Problema de la Secretaria, tras inspeccionar un elemento, sólo hay dos acciones posibles: aceptarlo o rechazarlo. La disyuntiva entre aceptar o rechazar el objeto k-ésimo aparece si éste es maximal o si es el segundo mejor del conjunto de elementos que ya han sido observados:

1. Si el objeto k-ésimo es el segundo mejor de los observados hasta ahora, sería el segundo mejor de todos (y, por lo tanto, el que se pretende escoger), si entre los $(n - k)$ elementos restantes no hay ninguno mejor.

2. Si el objeto k-ésimo es maximal, podría ocurrir que en los $(n-k)$ elementos restantes sólo haya uno mejor que él, por lo que el objeto k-ésimo sería el segundo mejor de todos y, por lo tanto, el que se busca.

En primer lugar, considérese el caso en el que el objeto k-ésimo es el segundo mejor de los observados hasta ese momento y es seleccionado. Por lo tanto, se tendrá éxito en el objetivo si entre los $(n - k)$ elementos restantes no hay ninguno mejor que él. Se denotará por g_k la probabilidad de que el objeto k-ésimo mantenga su rango parcial hasta el final, es decir, la probabilidad de que no haya ningún elemento mejor después de él.

Para encontrar una expresión de g_k, considérese el elemento $(k+1)$. Su rango parcial podría ir desde 1, si fuera mejor que todos los anteriores, hasta $(k+1)$, si fuera peor que todos ellos. Por lo tanto, la probabilidad de que sea mejor que el objeto seleccionado es $2/(k+1)$, ya que es la probabilidad de que $(k+1)$ tenga rango parcial 1 ó 2. En este caso, el objeto k-ésimo pasaría a tener rango parcial 3, por lo que se habría fracasado en el objetivo. Por el contrario, la probabilidad de que el elemento $(k+1)$ sea peor que el seleccionado es $(k-1)/(k+1)$.

Por todo ello, se llega a la siguiente expresión de g_k con $2 \leq k < n$:

$$g_k = \frac{k-1}{k+1}\, g_{k+1} \tag{8.1}$$

Desarrollando esta igualdad, se obtiene lo siguiente:

$$g_k = \frac{k-1}{k+1}\,\frac{k}{k+2}\,\frac{k+1}{k+3}\cdots\frac{n-3}{n-1}\,\frac{n-2}{n}\, g_n \tag{8.2}$$

Cancelando términos y teniendo en cuenta que $g_n = 1$ (ya que, si justo después de n mantiene el rango parcial igual a 2, también tiene rango global igual a 2), g_k queda finalmente de la siguiente manera:

$$g_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \tag{8.3}$$

En segundo lugar, considérese el caso en el que el objeto k-ésimo es maximal y es seleccionado. Luego se tendrá éxito en el objetivo si entre los $(n-k)$ elementos restantes sólo hay uno mejor que él. Se denotará por f_k la probabilidad de que el objeto seleccionado acabe siendo el segundo mejor objeto de todos, es decir, la probabilidad de que haya únicamente un elemento mejor después de él.

Para encontrar una expresión de f_k, se procederá de manera análoga al caso anterior. Por lo tanto, considérese el elemento $(k+1)$. El rango parcial de dicho elemento de nuevo toma un valor entre 1 y $(k+1)$:

- Si su rango parcial es 1, será mejor que todos los elementos anteriores, incluido el que se ha seleccionado. La probabilidad de que esto ocurra es $1/(k+1)$. En este caso, el objeto seleccionado pasaría a ser el segundo mejor, por lo que, para tener éxito en el objetivo, es necesario que a partir del elemento $(k+2)$ no haya ninguno otro mejor.
- En cualquier otro caso en el que el rango parcial de $(k+1)$ no es 1, que ocurre con probabilidad $k/(k+1)$, el objeto seleccionado se mantendría como el mejor. Por lo tanto, para tener éxito es necesario que a partir del elemento $(k+2)$ aparezca alguno mejor que el seleccionado.

Por todo ello, se puede escribir la siguiente expresión de f_k para $1 \leq k < n$:

$$f_k = \frac{k}{k+1} f_{k+1} + \frac{1}{k+1} g_{k+1} \tag{8.4}$$

y con $f_n = 0$, ya que la probabilidad de que después de n haya un objeto mejor que el seleccionado es nula al ser n el último. A continuación, se sustituye g_{k+1} por su expresión de acuerdo con (8.3):

$$f_k = \frac{k}{k+1} f_{k+1} + \frac{1}{k+1} \frac{k(k+1)}{n(n-1)} = \frac{k}{k+1} f_{k+1} + \frac{k}{n(n-1)} \tag{8.5}$$

Dado que $f_n = 0$, se procede por inducción inversa:

$$\begin{aligned}
f_{n-1} &= \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \\
f_{n-2} &= \frac{n-2}{n-1} \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \\
f_{n-3} &= \frac{n-3}{n-2} \frac{2(n-2)}{n(n-1)} + \frac{n-3}{n(n-1)} = \frac{3(n-3)}{n(n-1)} \\
&\dots \\
f_{n-k} &= \frac{k(n-k)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $1 \leq k \leq n$ se tiene que:

$$f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \tag{8.6}$$

En tercer y último lugar, considérese el caso en el que el objeto k-ésimo es rechazado, y también han sido rechazados todos los anteriores. Se denotará por v_k la probabilidad de éxito usando la estrategia óptima, es decir, la probabilidad de encontrar y seleccionar el objeto que tiene rango global igual a 2 entre los $(n-k)$ restantes. Para encontrar una expresión de v_k, se considera nuevamente el objeto $(k+1)$ y se plantean todas las situaciones que podrían ocurrir:

- Si el objeto $(k+1)$ tiene rango parcial 3 o más, entonces la estrategia óptima debe rechazarlo ya que, de lo contrario, la probabilidad de éxito sería nula. Por lo tanto, la probabilidad de ser rechazado es $(k-1)/(k+1)$, y la probabilidad de éxito en este caso vendría dada por v_{k+1}.
- Si el objeto $(k+1)$ es maximal, lo cual ocurre con probabilidad $1/(k+1)$, puede ser contratado o no. Se tomará la decisión que proporcione una mayor probabilidad de éxito:
  - Si se contratara, la probabilidad de éxito sería f_{k+1}.
  - Si se rechazara, la probabilidad de éxito sería v_{k+1}.
- Si el objeto $(k+1)$ es el segundo mejor de los observados hasta ese momento, lo cual ocurre con probabilidad $1/(k+1)$, de nuevo se puede aceptar o rechazar según sean las probabilidades de éxito en cada caso:

- Si se contratara, la probabilidad de éxito sería g_{k+1}.
- Si se rechazara, la probabilidad de éxito sería v_{k+1}.

Por todo ello, v_k se puede escribir como sigue:

$$v_k = \begin{cases} \max\left(v_{k+1}, f_{k+1}\right), & k = 0 \\ \\ \dfrac{k-1}{k+1}\, v_{k+1} + \dfrac{1}{k+1}\max\left(v_{k+1}, f_{k+1}\right) + \dfrac{1}{k+1}\max\left(v_{k+1}, g_{k+1}\right), & 1 \leq k < n \\ \\ 0, & k = n \end{cases}$$

Vanderbei logró demostrar un teorema según el cual v_k se puede formular de una manera mucho más sencilla, sin necesidad de recurrir a v_{k+1}, g_{k+1} y f_{k+1}. A continuación, se expone el enunciado de dicho teorema:

Teorema 8.1 *Sea $k_0 = \lfloor n/2 \rfloor$. Entonces v_k admite la siguiente expresión:*

$$v_k = \begin{cases} \dfrac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)}, & 0 \leq k < k_0 \\ \\ \dfrac{k(n-k)}{n(n-1)}, & k_0 \leq k \leq n \end{cases} \tag{8.7}$$

Ahora que ya se tienen las fórmulas específicas de g_k, f_k y v_k (igualdades (8.3), (8.6) y (8.7), respectivamente) se pueden representar gráficamente:

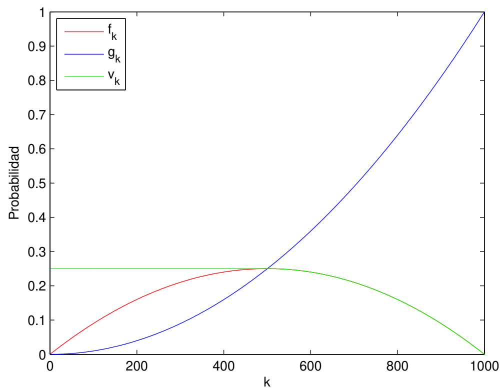

Figura 8.1: Comportamiento de f_k, g_k y v_k con $n = 1000$.

Como puede verse, v_k es constante para todo $k < k_0$ y, a partir de ahí, decrece hasta tomar el valor 0 en $k = n$. Por su parte, f_k es una parábola cóncava simétrica respecto de k_0, por lo que es creciente hasta dicho valor y, a partir de ahí, decrece hasta tomar el valor 0 en $k = n$. Por último, g_k es creciente. Por lo tanto, para todo $k < k_0$, se cumple que $g_k < f_k < v_k$, mientras que para todo $k > k_0$, se tiene que $g_k > f_k = v_k$. Para $k = k_0$, se satisface que $g_k < f_k = v_k$.

El comportamiento que tienen g_k, f_k y v_k permite hallar la estrategia de umbral óptima. Dado que v_k es la mayor de las 3 funciones para todo $k \leq k_0$, la estrategia óptima consistirá en rechazar los primeros k_0 objetos observados. Pero después de k_0, la mayor de las 3 funciones es g_k, por lo que se produce un cambio de estrategia: ya no se rechazan los objetos de manera sistemática, sino que se contratará el primer objeto que aparezca cumpliendo la condición de ser el segundo mejor de los observados hasta ese momento.

Por último, la probabilidad de éxito utilizando la estrategia óptima viene dada por v_0 de acuerdo con la definición de v_k, ya que v_0 sería equivalente a decir la probabilidad de seleccionar el segundo mejor objeto de todos antes de comenzar con el proceso. Luego:

$$\boxed{v_0 = \frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)}} \tag{8.8}$$

La siguiente tabla recoge los valores del umbral óptimo y de la probabilidad de éxito para diferentes valores de n:

n	k_0	v_0		n	k_0	v_0
2	1	0.5		**30**	15	0.2586
3	1	0.3333		**40**	20	0.2564
4	2	0.3333		**50**	25	0.2551
5	2	0.3		**60**	30	0.2542
6	3	0.3		**70**	35	0.2536
7	3	0.2857		**80**	40	0.2532
8	4	0.2857		**90**	45	0.2528
9	4	0.2778		**100**	50	0.2525
10	5	0.2778		**1000**	500	0.2503
20	10	0.2632		**10000**	5000	0.25

Cuadro 8.1: Valores de k_0 y v_0 para diferentes valores de n.

El caso $n = 1$ no aparece en la tabla porque, lógicamente, el problema no tiene sentido para ese valor. Por otro lado, como puede verse en la parte izquierda de la tabla, dado un cierto n y su consecutivo, o tienen el mismo valor de k_0, o tienen el mismo valor de v_0. Esto último supone una importante diferencia con respecto a la versión tradicional del SP, en la que sólo los valores $n = 2$ y $n = 3$ tenían la misma probabilidad de éxito. Además, se observa que v_0 tiende a $1/4$ cuando $n \to \infty$, lo cual es muy sencillo de demostrar a partir de la expresión (8.8).

Finalmente, obsérvese que las probabilidades de éxito obtenidas en la variante *POSTDOC* son menores que las obtenidas en la versión clásica del Problema de la Secretaria. En conclusión, es más difícil encontrar el segundo mejor objeto que el mejor de todos en un conjunto formado por n elementos.

8.2. SP con empleo incierto

En esta variante del Problema de la Secretaria, se quiere seleccionar el mejor objeto de un conjunto de n elementos, pero con la posibilidad adicional de que un objeto no esté disponible (la probabilidad de que esto ocurra es conocida y es la misma para todos los objetos, independientemente de su rango parcial). En ese caso, el proceso de selección continuaría y se pasaría a inspeccionar el siguiente objeto[1]. M.H. Smith resolvió este problema en [15].

Sea p la probabilidad de que un objeto seleccionado esté disponible y $1-p$ la probabilidad de que no lo esté. Considérese el caso en el que se rechaza el objeto k-ésimo y, por lo tanto, se pasa al siguiente:

- Si el objeto $(k+1)$ está disponible y es maximal, lo cual ocurre con probabilidad $p/(k+1)$, la acción que se llevará a cabo entre aceptar o rechazar será la que proporcione mayor probabilidad de éxito. Por lo tanto, la probabilidad de éxito vendría dada por:

$$\text{máx}\left\{P_n^R(k+1),\ P_n^A(k+1)\right\} \tag{8.9}$$

- En cualquier otro caso (el objeto no está disponible o no es maximal), la acción óptima es rechazarlo. La probabilidad de estar ante esta situación es $1-\frac{p}{k+1}$ y la probabilidad de éxito sería por definición $P_n^R(k+1)$.

Por todo ello, se puede plantear la siguiente relación de recurrencia:

$$P_n^R(k) = \frac{p}{k+1}\,\text{máx}\left\{P_n^R(k+1), \frac{k+1}{n}\right\} + \left(1-\frac{p}{k+1}\right)P_n^R(k+1) \tag{8.10}$$

Sabiendo que $P_n^R(n) = 0$ y $P_n = P_n^R(0)$, se puede proceder por inducción inversa a partir de la igualdad anterior para hallar la probabilidad de éxito. Por ejemplo, tomando $p = 1/2$ se obtienen los siguientes resultados:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0.5	0.375	0.3125	0.2969	0.2922	0.2845	0.2761	0.2737	0.2724	0.2699

Cuadro 8.2: Valores de P_n para diferentes valores de n con $p = 1/2$.

Si se comparan estos resultados con los mostrados en la tabla (2.1), se deduce que la probabilidad de éxito en el SP tradicional es mayor que en esta variante. Esto es lógico puesto que, cuanto menor sea el valor de p, menor será también el valor de P_n. De hecho, si p fuese igual a 1, se estaría ante el Problema de la Secretaria clásico. Por otro lado, a diferencia de lo que ocurría en el SP tradicional, para $n = 1$ es posible que no se tenga éxito en el objetivo, ya que depende de la disponibilidad del objeto, luego $P_1 = p$.

[1] En la formulación clásica del Problema de la Secretaria, sería equivalente a decir que existe la posibilidad adicional de que la candidata seleccionada rechace finalmente la oferta de empleo, de ahí el nombre de esta variante del SP.

8.2.1. Estrategia óptima de umbral

En esta variante, la estrategia óptima también es de tipo umbral. Para demostrarlo, el procedimiento que hay que llevar a cabo es análogo al realizado en la versión clásica del SP. Por lo tanto, se prueba en primer lugar que $P_n^R(k)$ es decreciente, para lo cual se utiliza la relación de recurrencia (8.10):

$$\begin{aligned} P_n^R(k) = \frac{p}{k+1} \max\left\{P_n^R(k+1), \frac{k+1}{n}\right\} + \left(1 - \frac{p}{k+1}\right) P_n^R(k+1) \geq \\ \geq \frac{p}{k+1}\, P_n^R(k+1) + \left(1 - \frac{p}{k+1}\right) P_n^R(k+1) \;=\; P_n^R(k+1) \end{aligned}$$

Por su parte, la probabilidad de éxito cuando se acepta el objeto k-ésimo (siendo éste un objeto maximal) es creciente ya que $P_n^A(k) = k/n$, y de ahí se deduce claramente que $P_n^A(k) < P_n^A(k+1)$.

A continuación, se representan gráficamente ambas funciones para diferentes valores de p y tomando $n = 1000$:

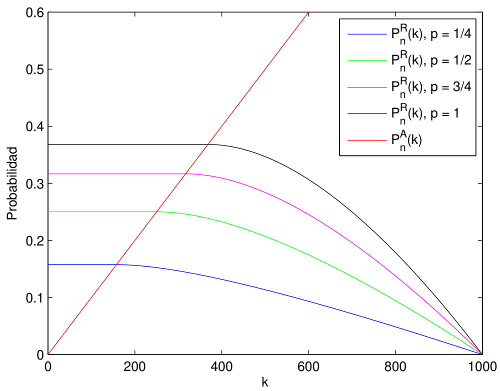

Figura 8.2: Comportamiento de $P_n^R(k)$ y $P_n^A(k)$ con $n = 1000$.

Por lo tanto, ocurre exactamente lo mismo que en el Problema de la Secretaria clásico, es decir, para valores pequeños de k, la estrategia óptima dice que los objetos deben ser rechazados, pero en el momento en el que ambas gráficas se cruzan, se produce un cambio de estrategia y, por ello, a partir de ese momento se seleccionará al primer objeto maximal que aparezca. El cruce entre ambas gráficas se produce en el umbral k_n.

Por otro lado, como puede verse, el umbral óptimo k_n depende de p. Así, cuanto menor sea el valor de dicho parámetro, menor será k_n. Esto es lógico puesto que, si p toma un valor pequeño, entonces la probabilidad de que un objeto esté disponible es reducida. Por ello, no se puede esperar a que pasen demasiados objetos para realizar el cambio de estrategia, ya que se correría el riesgo de acabar rechazando a todos. Por el contrario, si p toma un valor grande, se puede esperar un poco más antes de empezar a seleccionar.

8.2.2. Cálculo de la probabilidad de éxito P_n

Sea $P_n(k)$ la probabilidad de éxito al utilizar k como umbral. Esto es equivalente a decir la probabilidad de éxito rechazando hasta el k-ésimo elemento y quedando a la espera del primer objeto maximal que aparezca. Por lo tanto, $P_n(k)$ cumple también la recurrencia (8.10), pero con la salvedad de que $\max\left\{P_n^R(k+1),\ P_n^A(k+1)\right\}$ se sustituye por $P_n^A(k+1) = (k+1)/n$, ya que, si aparece un objeto maximal en la siguiente inspección, va a ser seleccionado. Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$P_n(k) \;=\; \frac{p}{n} + \left(1 - \frac{p}{k+1}\right) P_n(k+1) \tag{8.11}$$

Dado que $P_n(n) = 0$, se procede por inducción inversa:

$$\begin{aligned}
P_n(n-1) &= \frac{p}{n} \\
P_n(n-2) &= \frac{p}{n} + \left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\frac{p}{n} \;=\; \frac{p}{n}\left[1 + \left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\right] \\
P_n(n-3) &= \frac{p}{n} + \left(1 - \frac{p}{n-2}\right)\frac{p}{n}\left[1 + \left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\right] = \\
&= \frac{p}{n}\left[1 + \left(1 - \frac{p}{n-2}\right) + \left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\left(1 - \frac{p}{n-2}\right)\right] \\
P_n(n-4) &= \frac{p}{n} + \left(1 - \frac{p}{n-3}\right)\frac{p}{n}\left[1 + \left(1 - \frac{p}{n-2}\right) + \left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\left(1 - \frac{p}{n-2}\right)\right] \\
&= \frac{p}{n}\left[1 + \left(1 - \frac{p}{n-3}\right) + \left(1 - \frac{p}{n-2}\right)\left(1 - \frac{p}{n-3}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{p}{n-1}\right)\left(1 - \frac{p}{n-2}\right)\left(1 - \frac{p}{n-3}\right)\right] \\
&= \frac{p}{n}\left[1 + \sum_{j=1}^{3}\prod_{i=j}^{3}\left(1 - \frac{p}{n-i}\right)\right] \\
&\dots \\
P_n(n-k) &= \frac{p}{n}\left[1 + \sum_{j=1}^{k-1}\prod_{i=j}^{k-1}\left(1 - \frac{p}{n-i}\right)\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $1 \leq k \leq n$ se tiene que:

$$\boxed{P_n(k) \;=\; \frac{p}{n}\left[1 + \sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1 - \frac{p}{n-i}\right)\right]} \tag{8.12}$$

A continuación, se representa gráficamente la probabilidad de éxito $P_n(k)$ tomando $n = 1000$ y para diferentes valores de p:

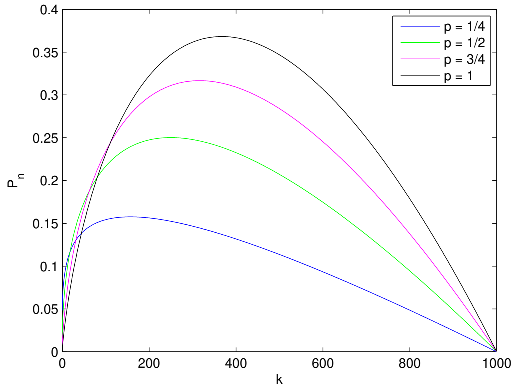

Figura 8.3: Probabilidad de éxito en función del umbral utilizado.

Como puede verse, $P_n(k)$ presenta un máximo, que se encuentra en $k = k_n$. Por lo tanto, al evaluar la expresión (8.12) en el umbral óptimo k_n se tiene la probabilidad de éxito cuando se utiliza la estrategia óptima.

8.2.3. Cálculo del umbral óptimo k_n

Para hallar el umbral óptimo, se procederá de manera análoga a como se hizo en la versión clásica del SP, es decir, se tendrá en cuenta que k_n es el mayor umbral que satisface la siguiente desigualdad:

$$P_n(k-1) \ \leq \ P_n(k) \tag{8.13}$$

que se puede escribir equivalentemente como sigue:

$$\frac{p}{n}\left[1+\sum_{j=1}^{n-k}\prod_{i=j}^{n-k}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\right] \ \leq \ \frac{p}{n}\left[1+\sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\right]$$
$$\sum_{j=1}^{n-k}\prod_{i=j}^{n-k}\left(1-\frac{p}{n-i}\right) \ \leq \ \sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)$$

Como puede verse, el límite superior tanto del sumatorio como del productorio del miembro de la izquierda es $n-k$, mientras que en el miembro de la derecha dicho límite vale $n-k-1$. Para hacer coincidir el límite superior de ambos sumatorios, basta con sacar del sumatorio de la izquierda el último término ($j = n-k$):

$$\sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)+\left(1-\frac{p}{k}\right) \ \leq \ \sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \left(1-\frac{p}{k}\right) \ \leq \ \sum_{j=1}^{n-k-1}\left[\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)-\prod_{i=j}^{n-k}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\right]$$

A continuación, se escriben los productorios de tal forma que tengan los mismos límites, y se simplifica la expresión:

$$
\begin{aligned}
1-\frac{p}{k} &\leq \sum_{j=1}^{n-k-1}\left[\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)-\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\left(1-\frac{p}{k}\right)\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow 1-\frac{p}{k} &\leq \sum_{j=1}^{n-k-1}\left[\left(1-\left(1-\frac{p}{k}\right)\right)\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow 1-\frac{p}{k} &\leq \frac{p}{k}\sum_{j=1}^{n-k-1}\left[\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\right] \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{k}{p} &\leq 1+\sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el umbral óptimo k_n viene dado por:

$$
\boxed{k_n = \text{máx}\left\{k : \frac{k}{p} \leq 1+\sum_{j=1}^{n-k-1}\prod_{i=j}^{n-k-1}\left(1-\frac{p}{n-i}\right)\right\}} \tag{8.14}
$$

8.2.4. Resultados numéricos

Finalmente, se calcula tanto el umbral óptimo k_n como de la probabilidad de éxito P_n para diferentes valores de n y de p. Así pues, utilizando las igualdades (8.12) y (8.14) se obtienen los siguientes valores:

$p = 0.5$				$p = 0.9$		
n	k_n	P_n		**n**	k_n	P_n
1	0	0.5		**1**	0	0.9
2	0	0.375		**2**	0	0.495
3	0	0.3125		**3**	1	0.465
4	1	0.2969		**4**	1	0.4354
5	1	0.2922		**5**	2	0.4037
10	2	0.2699		**10**	3	0.3794
25	6	0.2577		**25**	9	0.3602
50	12	0.2538		**50**	17	0.3546
100	25	0.2519		**100**	35	0.3516
1000	250	0.2502		**1000**	348	0.3490

Cuadro 8.3: Valores de k_n y P_n para diferentes valores de n y de p.

Como puede verse, la probabilidad de éxito es mayor cuanto mayor sea p. Así, para el caso $p = 0.9$, al estar muy cercana dicha probabilidad a 1, los resultados obtenidos son parecidos a los del Problema de la Secretaria clásico. Sin embargo, para $p = 0.5$ los resultados difieren bastante más. En cuanto a la monotonía de las sucesiones, ocurre exactamente lo mismo en el SP tradicional: la sucesión formada por los umbrales óptimos es creciente, mientras que la formada por las probabilidades de éxito es decreciente. Por último, M. H. Smith calculó el límite de ambas sucesiones, demostrando lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty} P_n \;=\; p^{\frac{1}{1-p}} \tag{8.15}$$

Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado un estudio en profundidad de la versión clásica del Problema de la Secretaria. Para resolver este problema de la manera más completa posible, es necesario, en primer lugar, hallar dos cosas: la estrategia óptima que hay que llevar a cabo y la probabilidad de éxito cuando se utiliza dicha estrategia.

Obtener la estrategia óptima es muy sencillo mediante programación dinámica. Para ello, basta con tener en cuenta que en cada nodo de decisión se seleccionará la acción que proporcione mayor probabilidad de éxito entre aceptar el objeto o rechazarlo. Procediendo de esta manera, se puede obtener una expresión para la probabilidad de éxito cuando se rechaza el objeto k-ésimo y otra para la probabilidad de éxito en caso de aceptar (siempre y cuando el objeto sea maximal). Finalmente, a partir de estas expresiones obtenidas, se hace un pequeño estudio de la monotonía de $P_n^R(k)$ y $P_n^A(k)$, deduciéndose que la estrategia óptima consiste en rechazar los primeros k_n elementos y, después de esto, aceptar el primer elemento maximal que aparezca.

Una vez que se conoce cómo hay que proceder para maximizar la probabilidad de encontrar al mejor objeto, se pretende conocer cuál es esta probabilidad. Como se ha podido comprobar, existen diferentes formas de calcular P_n:

1. Procediendo por inducción inversa a partir de la relación de recurrencia (2.2), ya que $P_n^R(0) = P_n$ y $P_n^R(n) = 0$. En este caso, ni siquiera sería necesario conocer en qué consiste la estrategia óptima.

2. Mediante la igualdad (3.3), que permite calcular de manera directa la probabilidad de éxito cuando se utiliza la estrategia óptima. Por lo tanto, este método permite hacer el cálculo sin necesidad de recurrir a un proceso iterativo como ocurría en el caso anterior, pero obliga a conocer el valor del umbral óptimo k_n.

3. A través del Teorema de Bruss, considerando el Problema de la Secretaria como un problema de último éxito.

El siguiente paso en el estudio del Problema de la Secretaria es tratar la monotonía y la tendencia de k_n y P_n. Así pues, en el apartado sobre la monotonía, se enunciaron y demostraron 4 teoremas sobre el comportamiento de k_n y de P_n en función de n. Gracias a estos teoremas se puede afirmar que la sucesión formada por los umbrales óptimos es monótona creciente, mientras que la sucesión formada por las probabilidades de éxito es monótona decreciente.

En cuanto a la tendencia de ambas sucesiones, se ha probado que tanto k_n/n como P_n tienden a $1/e$ cuando $n \to \infty$. Se puede llegar a este resultado por diferentes vías:

1. Aproximando el sumatorio de las expresiones (3.6) y (3.3) por una integral, lo cual no es del todo riguroso pero proporciona los resultados correctos.
2. Utilizando la acotación de Gilbert y Mosteller del umbral óptimo k_n y aplicando, posteriormente, el Teorema del emparedado.
3. A partir de la igualdad (7.23), que es una fórmula alternativa para calcular el umbral óptimo utilizando para ello la función W de Lambert.

Finalmente, se han estudiado dos variantes del SP: la variante *POSTDOC* y con empleo incierto. El razonamiento realizado para resolver estos problemas es similar al llevado a cabo en la versión tradicional. En ambos, la estrategia óptima también es de tipo umbral, y las probabilidades de éxito obtenidas son menores que en el SP.

Bibliografía

[1] Lindley, D.V. (1961) Dynamic programming and decision theory. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 10(1):39-51.

[2] Dynkin, E.B. (1963) the optimum choice of the instant for stopping a markov process. *Soviet Mathematics - Doklady*, 4:627-629.

[3] Gilbert, J. and F. Mosteller. (1966) Recognizing the maximum of a sequence. *J. Am. Statist. Assoc.*, 61:35-73.

[4] Bruss F.T. (2000). "Sum the Odds to One and Stop", Annals of Probability Vol. 28, 1384-1391.

[5] @misc, Consultada el día 18 de Junio de 2020,
url = https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number

[6] @misc, Consultada el día 25 de Junio de 2020,
url = http://fernandorevilla.es/blog/2017/03/02/numeros-armonicos-y-constante-de-euler-mascheroni/

[7] @misc, Consultada el día 22 de Junio de 2020,
url = https://mathworld.wolfram.com/HarmonicNumber.html

[8] @misc, Consultada el día 30 de Junio de 2020,
url = https://en.wikipedia.org/wiki/Digamma_function

[9] @misc, Consultada el día 3 de Julio de 2020,
url = https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html

[10] @misc, Consultada el día 30 de Junio de 2020,
url = https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

[11] Ferguson, T.S. (1989) Who solved the secretary problem? *Statistical Science*, 4(3):282-296. .

[12] @misc, Consultado el día 5 de Julio de 2020,
url = https://mathworld.wolfram.com/SultansDowryProblem.html

[13] Vanderbei, R.J. (1983) The postdoc variant of the secretary problem (unpublished) *http://www.princeton.edu/∼rvdb/tex/PostdocProblem/PostdocProb.pdf.*

[14] Bayón, L.; Fortuny, P.; Grau, J.M.; Oller-Marcén, A.M. and Ruiz, M.M. (2017) The Best-or-Worst and the Postdoc problems. Journal of Combinatorial Optimization 35(3), pp. 703-723.

[15] Smith, M.H. (1975). A secretary problem with uncertain employment, J. Appl. Prob. 12, 620-624.