TEMA DE INVESTIGACIÓN

Presentado por:

José María Grau Ribas

UNA NUEVA MIRADA AL PROBLEMA DE LA SECRETARIA

Departamento de Matemáticas

Universidad de Oviedo

Una nueva mirada al problema de la secretaria

Índice

1. PREÁMBULO

El *problema de secretaria* es uno de los muchos nombres que recibe uno de los más famosos problemas de parada óptima. Los orígenes de este problema se remontan a mediados del siglo pasado cuando el matemático estadounidense Merrill Flood lo presentó en una conferencia en la Universidad George Washington en Enero de 1950. Sin embargo, hubo que esperar hasta Febrero de 1960 para que el problema apareciera impreso por primera vez. Fue en la columna de Martin Gardner de la revista *Scientific American*. A partir de entonces, fueron muchos los probabilistas y estadísticos que se interesaron por el problema.

La primera parte de este trabajo recoge los principales resultados que se conocen sobre el tema, presentados, en algunos casos, de modo distinto a los publicados;en la segunda, se pretende poner en valor la metodología introducida por el candidato en [9], que permite obtener de modo sistemático resultados asintóticos en variantes del problema original, que aparecen en la literatura obtenidos por otros y bien diferentes procedimientos.

2. EL PROBLEMA DE LA SECRETARIA

2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El problema de la secretaria suele plantearse de un modo informal como sigue:

• Un empleador quiere contratar a la MEJOR secretaria de las n disponibles.

• Las candidatas son entrevistadas una por una en orden aleatorio.

• La decisión sobre cada candidata se hará inmediatamente después de la entrevista.

• El empleador sólo es capaz de discernir si una candidata es mejor que las anteriores.

Se trata de encontrar la estrategia óptima que maximiza la probabilidad de seleccionar la mejor candidata.

También puede plantearse como un problema de toma de decisiones en un juego con las siguientes reglas:

★ Disponemos de una urna con n objetos diferentes totalmente ordenados.

(Si $x \prec y$ diremos que y es mejor que x)

★ Los objetos son extraídos y mostrados en orden aleatorio.

★ Cada objeto debe ser seleccionado o rechazado antes de ser mostrado el siguiente.

★ Sólo es posible discernir si un objeto es mejor que todos los anteriores.

★ Seleccionar el mejor objeto se considera ÉXITO y, en otro caso, FRACASO.

El problema tiene una elegante solución. Dynkin [5] y Lindley [10] demostraron de forma independiente que la mejor estrategia consiste en rechazar aproximadamente las primeras $\lfloor n/e \rfloor$ candidatas entrevistadas y luego seleccionar la primera que sea mejor que todas las anteriores. Siguiendo esta estrategia, la probabilidad de seleccionar a la mejor candidata es al menos $1/e$, y ese es el valor aproximado para valores grandes de n. Esta solución fue refinada por Gilbert and Mosteller [8], mostrando que $\left\lfloor (n-\frac{1}{2})e^{-1}+\frac{1}{2} \right\rfloor$ es mejor aproximación para el umbral óptimo que $\lfloor n/e \rfloor$.

2.2. Solución mediante programación dinámica

Utilizaremos la siguiente notación:

- $P_n^R(k)$ denotará la probabilidad de éxito al rechazar el k-ésimo objeto, con n objetos en total, siguiendo luego la estrategia óptima. Dicho de otro modo, para que tenga sentido para $k=0$, es la probabilidad de éxito cuando nos disponemos a observar el objeto $k+1$.

- $P_n^A(k)$ denotará la probabilidad de éxito al seleccionar el k-ésimo objeto, con n objetos en total, siendo éste un objeto maximal (es decir, mejor que todos los inspeccionados hasta ese momento). El valor de esta probabilidad es $\frac{k}{n}$.

- $\mathbf{P}_n$ denotará la probabilidad de éxito, usando la estrategia óptima con n objetos en total. Su valor es $\mathbf{P}_n = P_n^R(0)$ ya que representa la probabilidad de éxito antes de comenzar las inspecciones.

Tendremos en cuenta que la estrategia óptima consiste en realizar en cada nodo de decisión la acción de mayor probabilidad de éxito. Tras cada inspección, sólo hay dos acciones posibles: aceptar el objeto o rechazarlo. Obviamente, si el objeto no es mejor que los anteriores, la estrategia óptima debe rechazarlo ya que, de lo contrario, se estaría eligiendo un objeto que no es el mejor y, por lo tanto, la probabilidad de éxito sería nula. De este modo, la disyuntiva entre aceptar o rechazar el objeto k-ésimo aparece cuando éste es mejor que todos los anteriores (**buen candidato**), lo cual ocurre con probabilidad $\frac{1}{k}$ (ya que es la probabilidad de que el mejor de los k primeros objetos esté en la posición k-ésima). Con estas simples consideraciones, el problema puede ser resuelto mediante el uso de la programación dinámica.

Cuando se observa el objeto k-ésimo, hay dos escenarios posibles complementarios:

$\mathbf{A}_k$) El objeto es buen candidato: la acción óptima entre aceptarlo y rechazarlo es la que proporciona mayor probabilidad de éxito; dicha probabilidad de éxito es, por tanto:

$$P(\text{éxito } | \mathbf{A}_k) = \text{máx}\left\{P_n^R(k), P_n^A(k)\right\} = \text{máx}\left\{P_n^R(k), k/n\right\}.$$

$\mathbf{B}_k$) El objeto no es buen candidato: La acción óptima es rechazarlo y la probabilidad de éxito en tal caso es

$$P(\text{éxito } | \mathbf{B}_k) = P_n^R(k).$$

Cuando rechazamos el objeto k-ésimo, iremos a uno de los dos escenarios posibles, $\mathbf{A}_{k+1}$ o $\mathbf{B}_{k+1}$ con probabilidades respectivas

$$P(\mathbf{A}_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \text{ y } P(\mathbf{B}_{k+1}) = \frac{k}{k+1},$$

de modo que, en virtud del teorema de la probabilidad total, tendremos

$$P_n^R(k) = P(\mathbf{A}_{k+1})P(\text{éxito } |\mathbf{A}_{k+1}) + P(\mathbf{B}_{k+1})P(\text{éxito } |\mathbf{B}_{k+1}).$$

Con todo ello tenemos la siguiente recurrencia

$$P_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \cdot \text{máx}\left\{P_n^A(k+1),\ P_n^R(k+1)\right\} + \frac{k}{k+1} \cdot P_n^R(k+1),$$

y, en definitiva,

$$P_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \cdot \text{máx}\left\{\frac{k+1}{n},\ P_n^R(k+1)\right\} + \frac{k}{k+1} \cdot P_n^R(k+1)$$

$$P_n^R(n) = 0,$$

donde la condición final, $P_n^R(n) = 0$, representa la nula probabilidad de éxito rechazando el último objeto.

Esto permite calcular en tiempo lineal la probabilidad de éxito para n objetos, sin necesidad de hablar, por el momento, de cuál es, de hecho, la estrategia óptima.

A continuación se muestran las probabilidades de éxito, $\mathbf{P}_n$, para los 12 primeros valores de n y para las primeras 6 potencias de 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{P}_n$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{77}{180}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{459}{1120}$	$\frac{341}{840}$	$\frac{3349}{8400}$	$\frac{251}{630}$	$\frac{32891}{83160}$

($A226242/A226243$ en OEIS)

n	$\mathbf{P}_n$
10	0.39869048
100	0.37104278
1000	0.36819562
10000	0.36791105
100000	0.36788260
1000000	**0.367879**76

$e^{-1} = \underline{\mathbf{0.367879}}4411714423...$

2.3. Estrategia óptima de umbral

La siguiente gráfica sugiere la naturaleza de la estrategia óptima (estrategia de umbral).

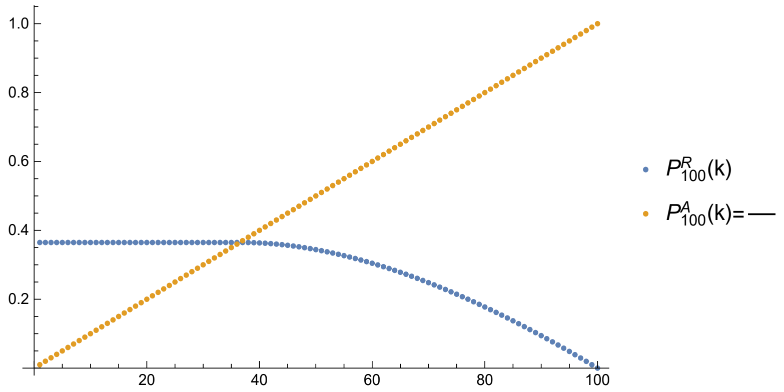

Figura 1

Proposición 2.1. *Para cada n existe k_n de forma que la siguiente estrategia es óptima:*
1) Se rechazan los k_n primeros objetos.
2) A partir de ahí, se selecciona el primero que sea mejor que los anteriores.
*Diremos que k_n es **umbral óptimo**.*

Demostración. Basta probar que

$$P_n^A(k) > P_n^R(k) \Rightarrow P_n^A(k+1) > P_n^R(k+1)$$

y, en tal caso,

$$k_n = \max\{k : P_n^A(k) < P_n^R(k)\}.$$

Puesto que P_n^A es creciente, basta probar que P_n^R es no creciente.

$$P_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \cdot \max\left\{P_n^R(k+1),\ \frac{k+1}{n}\right\} + \frac{k}{k+1} \cdot P_n^R(k+1) \geq$$

$$\frac{k}{k+1} \cdot P_n^R(k+1) + \frac{1}{k+1} \cdot P_n^R(k+1) = P_n^R(k+1).$$

□

2.4. Cálculo del umbral óptimo

Llamaremos ahora $\overline{P}_n^R(k)$ a la probabilidad de éxito usando como umbral k. Esto es lo mismo que la probabilidad de éxito rechazando el k-ésimo objeto quedando a la espera del primero que aparezca mejor que los anteriores. $\overline{P}_n^R(k)$ obedece a la misma recurrencia que $P_n^R(k)$ con la salvedad de que $\max\left\{\frac{k+1}{n},\ P_n^R(k+1)\right\}$ es sustituido por

$\frac{k+1}{n}$, puesto que, si aparece un buen candidato en la siguiente inspección, éste es seleccionado con probabilidad de éxito $\frac{k+1}{n}$. Así pues,

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n} + \frac{k}{k+1} \cdot \overline{P}_n^R(k+1); \overline{P}_n^R(n) = 0,$$

y, finalmente,

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{1}{n} + \frac{k}{k+1} \cdot \overline{P}_n^R(k+1); \overline{P}_n^R(n) = 0$$

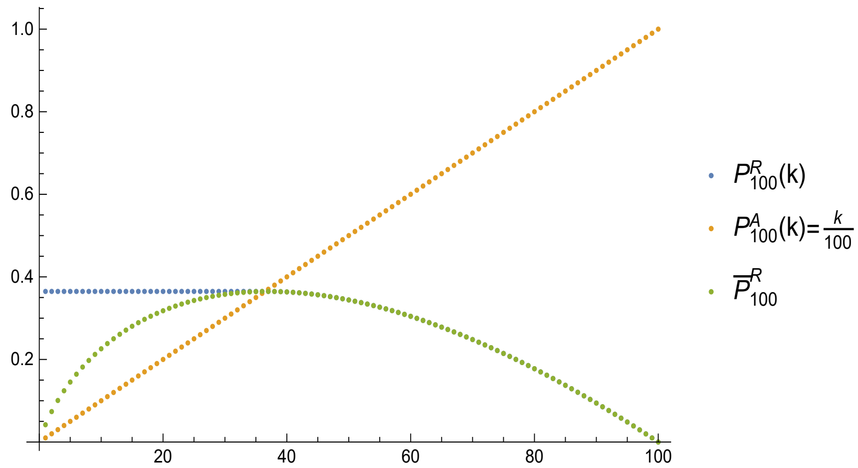

Figura 2

Proposición 2.2. *Si k_n es umbral óptimo, entonces*

- *Si $k \geq k_n$ entonces $\overline{P}_n^R(k) = P_n^R(k)$.*
- *Si $k < k_n$ entonces $\mathbf{P}_n = \overline{P}_n^R(\kappa_n) = P_n^R(k) \geq \overline{P}_n^R(k)$.*

Proposición 2.3. *Para todo $k = 1, ..., n$*

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$$

Para $k = 0$, tenemos $\overline{P}_n^R(0) = 1/n$.

Demostración. Para $k = n$, es obviamente cierto. Para $k < n$ se puede proceder por inducción hacia atrás. Supondremos cierto para k y veremos que ello implica que lo es para $k-1$,

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} \overset{??}{\Longrightarrow} \overline{P}_n^R(k-1) = \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

$$\overline{P}_n^R(k-1) = \frac{1}{n} + \frac{k-1}{k} \cdot \overline{P}_n^R(k) \overset{\text{H.I.}}{=} \frac{1}{n} + \frac{k-1}{k}\frac{k}{n} \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{k-1}{n} \cdot \left(\sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{i} - \frac{1}{k-1} \right) = \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{1}{i}$$

□

Proposición 2.4. *Para $n = 2$, son umbrales óptimos 0 y 1. Para $n > 2$, el umbral óptimo es único.*

Demostración. Sea k_n el menor umbral óptimo. Si no es único, significa que en la entrevista $k_n + 1$ será idéntica la probabilidad de éxito aceptando un buen candidato que rechazándolo.

$$P_n^A(k_n+1) = P_n^R(k_n+1) = \overline{P}_n^R(k_n+1)$$

$$\frac{k_n+1}{n} = P_n^A(k+1) = \overline{P}_n^R(k_n+1) = \frac{k_n+1}{n} \sum_{i=k_n+1}^{n-1} \frac{1}{i} \Longrightarrow \sum_{i=k_n+1}^{n-1} \frac{1}{i} = 1,$$

lo cual es imposible, salvo cuando $n = 2$.

□

Proposición 2.5. *Para todo $n > 2$, denotando por κ_n al único umbral óptimo, se cumple:*

$$\kappa_n = \text{máx} \left\{ k : \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} > 1 \right\}$$

$$\mathbf{P}_n = \overline{P}_n^R(\kappa_n) = \frac{\kappa_n}{n} \cdot \sum_{i=\kappa_n}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Demostración. $\kappa_n = \text{máx} \left\{ k : \overline{P}_n^R(k) > \frac{k}{n} \right\} = \text{máx} \left\{ k : \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} > \frac{k}{n} \right\}$

$$\kappa_n = \text{máx} \left\{ k : \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} > 1 \right\}.$$

□

A continuación se muestran los umbrales óptimos para las 6 primeras potencias de 10.

n	κ_n
10	3
100	37
1000	368
10000	3679
100000	36788
1000000	**367879**

$$e^{-1} = \mathbf{0}.\underline{\mathbf{367879}}4411714423...$$

2.5. Resultados de monotonía

En esta sección recogemos resultados de monotonía, tanto para el umbral óptimo, κ_n, (monotonía no decreciente), como para la probabilidad de éxito, $\mathbf{P}_n$, (monotonía estrictamente decreciente). Estos resultados aparecen demostrados en un artículo muy reciente de T.F. Bruss [4] como aplicación del Odds-Theorem [3]; aquí se prueban de modo original sin hacer uso del mencionado teorema.

Proposición 2.6. $\kappa_{n+1} \subset \{\kappa_n, \kappa_n + 1\}$.

Demostración.

$$\kappa_n = \text{máx}\left\{k : \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} > 1\right\} \leq \text{máx}\left\{k : \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} > 1\right\} = \kappa_{n+1}.$$

Falta ver que $\kappa_{n+1} < 2 + \kappa_n$. Efectivamente,

$$\sum_{i=\kappa_n+2}^{n} \frac{1}{i} < \sum_{i=\kappa_n+1}^{n-1} \frac{1}{i} \leq 1,$$

lo que significa que $\kappa_{n+1} < 2 + \kappa_n$, pues de lo contrario tendríamos la contradicción:

$$\sum_{i=\kappa_{n+1}}^{n} \frac{1}{i} < 1.$$

□

Proposición 2.7. $\mathbf{P}_n \geq \mathbf{P}_{n+1}$.

Demostración. Supongamos lo contrario: $\mathbf{P}_{n+1} > \mathbf{P}_n$. Consideremos ahora el problema auxiliar, consistente en el mismo problema con un objeto adicional ($n+1$ objetos) con la información adicional del lugar que ocupa el objeto de menor rango (peor objeto). La probabilidad P_n^* de éxito en este problema es claro que satisface $P_n^* \geq \mathbf{P}_{n+1}$ (la información adicional no puede disminuir la probabilidad de éxito). Pero el problema auxiliar, ignorando el objeto peor, es de hecho equivalente al problema de la secretaria con n objetos. De modo que $P_n^* = \mathbf{P}_n$. Y de ahí la contradicción:

$$P_n^* \geq \mathbf{P}_{n+1} > \mathbf{P}_n = P_n^*.$$

□

Proposición 2.8. $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 = 1/2$ *y, para todo* $n > 2$, $\mathbf{P}_n > \mathbf{P}_{n+1}$.

Demostración. Recordemos, en primer lugar, que la suma de inversos de naturales consecutivos nunca es entera, con la salvedad de $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$.

Teniendo en cuenta la proposición anterior, bastará demostrar que $\mathbf{P}_n \neq \mathbf{P}_{n+1}$ para $n > 2$; procederemos por reducción al absurdo. Supongamos $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n+1}$ con $n > 2$. Tenemos dos posibilidades $\kappa_n = \kappa_{n+1}$ y $\kappa_n + 1 = \kappa_{n+1}$.

• Si $\kappa_n = \kappa_{n+1}$ entonces

$$\mathbf{P}_n = \frac{\kappa_n}{n}\sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i} = \frac{\kappa_{n+1}}{n+1}\sum_{i=\kappa_{n+1}}^{n}\frac{1}{i} = \mathbf{P}_{n+1}.$$

De ahí se sigue que

$$\frac{\kappa_n\left(-1+\sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i}\right)}{n\,(1+n)} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i} = 1 \text{ (contradicción).}$$

• Si $\kappa_n + 1 = \kappa_{n+1}$ entonces

$$\mathbf{P}_n = \frac{\kappa_n}{n}\sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i} = \frac{\kappa_{n+1}}{n+1}\sum_{i=\kappa_{n+1}}^{n}\frac{1}{i} = \mathbf{P}_{n+1}$$

$$\mathbf{P}_n = \frac{\kappa_n}{n}\sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i} = \frac{\kappa_n+1}{n+1}\sum_{i=\kappa_n+1}^{n}\frac{1}{i} = \mathbf{P}_{n+1}.$$

De ahí se sigue que

$$\frac{(n-\kappa_n)\left(-1-\kappa_n+\kappa_n\sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i}\right)}{(n+n^2)\,\kappa_n} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=\kappa_n}^{n-1}\frac{1}{i} = \frac{1+\kappa_n}{\kappa_n} = 1+\frac{1}{\kappa_n}$$

y, en consecuencia, se llega nuevamente a similar contradicción:

$$\sum_{i=\kappa_n+1}^{n-1}\frac{1}{i} = 1.$$

□

2.6. Resultados asintóticos: $\frac{\kappa_n}{n} \to e^{-1}$ y $\mathbf{P}_n \to e^{-1}$

2.6.1. Prueba laxa

En diversos documentos introductorios del problema de la secretaria, una vez deducida la expresión

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{k}{n}\cdot\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i},$$

se procede de un modo no demasiado riguroso como el siguiente. Se considera

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{k}{n}\cdot\sum_{i=k}^{n-1}\frac{n}{i}\frac{1}{n}$$

y, entonces, se argumenta: " *haciendo tender n infinito, escribiendo x como el límite de k/n, usando t para i/n y dt para $1/n$, la suma puede ser aproximada por la integral*"

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \log(x)$$

y, ahora, puesto que el máximo de $P(x)$ se alcanza en e^{-1} con $P(e^{-1}) = e^{-1}$, se concluye que el `cociente óptimo`, k/n, al tender n a infinito, tiende a e^{-1} y la probabilidad de éxito tiende también a e^{-1}.

Esto es lo que encontramos en la entrada de wikipedia relativa a *secretary problem* y, por ejemplo, en [6], donde, eso sí, se reconoce que la argumentación es *floja* al tiempo que se invita a consultar una más *lúcida* presentación en [8].

2.6.2. Prueba de Gilbert y Mosteller

En [8] se llega al siguiente resultado:

Proposición 2.9. *Si κ_n es el umbral óptimo, entonces*

$$\mathrm{I}(n) := \frac{n}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{1-3e}{-2+6e+4n} \leq \kappa_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{n}{e} =: \mathrm{S}(n).$$

De ahí se deducen de modo sencillo los valores asintóticos del umbral óptimo y probabilidad de éxito.

Proposición 2.10.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n} = \frac{1}{e} = 0.3678794411...$$

Demostración. Por la proposición 2.9, dividiendo por n y, vía teorema del bocadillo, se tiene que

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow e^{-1}.$$

Por otra parte

$$\sum_{i=\kappa_n}^{n-1} \frac{1}{i} \approx \log(n) - \log(\kappa_n) = \log\left(\frac{n}{\kappa_n}\right) \longrightarrow 1$$

y, finalmente,

$$\mathbf{P}_n = \frac{\kappa_n}{n} \cdot \sum_{i=\kappa_n}^{n-1} \frac{1}{i} \longrightarrow e^{-1}.$$

□

Si κ_n es el umbral óptimo, entonces $\lceil \mathrm{I}(n) \rceil \leq \kappa_n \leq \lfloor \mathrm{S}(n) \rfloor$. Gilbert and Mosteller ya indicaron en su trabajo (1966) que $\kappa_n = \lfloor \mathrm{S}(n) \rfloor$ para todos los valores de n hasta 100, con la única excepción de $n = 97$.

He registrado recientemente en la OEIS la sucesión formada por estas excepciones ($\kappa_n \neq \lfloor \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{n}{e} \rfloor$) que son muy escasas:

97, 24586, 14122865, 14437880866, 23075113325617, 53123288947296842, ...($A306480$ de OEIS)

2.6.3. Prueba alternativa

• **Los números armónicos y la función digamma.** La función $\mathbf{H}(n)$, que representa el n-ésimo número armónico

$$\mathbf{H}(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

tiene una extensión continua en $\mathbb{R}^+$ mediante la *función digamma* que se define como la derivada logarítmica de la función gamma,

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

En concreto,

$$\mathbf{H}(n) = \psi(n+1) + \gamma,$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right] = 0.577215664901...$$

El siguiente resultado muestra una relación entre las funciones $\log(x)$ y $\psi(x)$ que será útizada más adelante.

Lema 2.1. *(Alzer, 1997 [1]) Para todo $x > 0$,*

$$\log(x) - \frac{1}{x} \leq \psi(x) \leq \log(x) - \frac{1}{2x}$$

Lema 2.2. *Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones reales definidas en $[0, n]$ del siguiente modo, donde ψ representa la función digamma:*

$$F_n(k) = \begin{cases} \frac{k}{n}(\psi(n) - \psi(k)), & \text{if } k > 0\,; \\ 1/n, & \text{if } k = 0. \end{cases}$$

Se cumple:

i) Para todo $k \in \{0, ..., n\}$, $F_n(k) = \overline{P}_n^R(k)$.

ii) La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas para cada $x \in [0, 1]$ como $f_n(x) = F_n(nx)$ converge uniformemente en $[0, 1]$ a la función continua:

$$\mathfrak{f}(x) := -x \log(x).$$

Demostración.

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i} = \frac{k}{n}(\mathbf{H}(n-1) - \mathbf{H}(k-1)) = \frac{k}{n}(\psi(n) - \psi(k)).$$

Usando el Lema de Alzer, se llega a que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$

$$\mathfrak{f}(x) - \frac{1}{n} \leq f_n(x) \leq \mathfrak{f}(x) + \frac{1}{n}.$$

□

• **PRUEBA PERSONAL.** En [9] tenemos el resultado siguiente.

Teorema 2.1. *Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales*

$$F_n : \{0, ..., n\} \to \mathbb{R} \text{ ó } F_n : [0, n] \to \mathbb{R}$$

y sea $\mathcal{M}_n \in \{0, \ldots, n\}$ donde F_n, restringida a los enteros, alcanza su máximo valor. Si la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas para cada $x \in [0,1]$ como

$$f_n(x) = F_n(\lfloor nx \rfloor) \text{ ó } f_n(x) = F_n(nx)$$

converge uniformemente en $[0,1]$ a una función continua f y θ es el único máximo de f en $[0,1]$, entonces:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{M}_n}{n} = \theta.$

ii) $\lim_{n\to\infty} F_n(\mathcal{M}_n) = f(\theta).$

iii) $\lim_{n\to\infty} F_n(\lfloor n\theta \rfloor) = f(\theta).$

Corolario 2.1.

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{n} = e^{-1}.$

ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{P}_n^R(\kappa_n) = e^{-1}.$

iii) $\lim_{n\to\infty} \overline{P}_n^R\left(\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor\right) = e^{-1}.$

3. Variantes del problema de la secretaria

Estudiaremos, en esta sección, 4 variantes del problema de la secretaria, haciendo uso de la metodología introducida en [9], basada en la utilización del Teorema 2.1, en combinación con el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sean* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de funciones*

$$F_n, G_n, H_n : \{0, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo

$$\begin{aligned} F_n(k) &= G_n(k) + H_n(k)F_n(k+1), \\ F_n(n) &= \mu_n \longrightarrow \mu. \end{aligned}$$

Para cada $x \in [0,1]$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *consideraremos*

- $f_n(x) = F_n(\lfloor nx \rfloor)$.
- $g_n(x) = nG_n(\lfloor nx \rfloor)$.
- $h_n(x) = n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor))$

Si se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) Las sucesiones $\{h_n\}$ *y* $\{g_n\}$ *convergen puntualmente en* $(0,1)$ *y uniformemente en* $[\varepsilon, \varepsilon']$ *para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ *a las funciones continuas* $h(x)$ *y* $g(x)$, *respectivamente.*

ii) La sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[0,1]$ *a una función continua* f,

entonces, $f(1) = \mu$ *y* f *satisface en* $(0,1)$ *la siguiente ecuación diferencial*

$$f'(x) = f(x)h(x) - g(x).$$

A continuación, un resultado auxiliar incluido en [9] que facilita la verificación de la convergencia uniforme de las sucesiones auxiliares, $\{g_n\}$ y $\{h_n\}$, del teorema anterior.

Lema 3.1. *Sea* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones reales de variable real*

$$\mathcal{F}_n : [0,n] \to \mathbb{R}.$$

Si la sucesión de funciones $\{\mathrm{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *donde* $\mathrm{f}_n(x) = \mathcal{F}_n(nx)$ *para cada* $x \in [\alpha, \beta]$, *converge uniformemente en* $[\alpha, \beta]$ *a una función continua* f, *entonces convergen a* f *de idéntico modo las sucesiones*

$$\bar{\mathrm{f}}_n(x) = \mathcal{F}_n(\lfloor nx \rfloor)$$

$$\mathrm{f}_n^*(x) = \mathcal{F}_n(\lfloor nx \rfloor + 1).$$

3.1. Revisión del Problema de la Secretaria

En el caso del problema de la secretaria, teníamos

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{1}{n} + \frac{k}{k+1} \cdot \overline{P}_n^R(k+1); \overline{P}_n^R(n) = 0.$$

En este caso, la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(x) = \overline{P}_n^R(\lfloor nx \rfloor)$ se conoce a priori; en otros muchos problemas de naturaleza similar, la asunción de la uniformidad de la convergencia resulta razonable. Dicha uniformidad se visualiza (o se descarta) normalmente con la observación de la representación gráfica de f_n para valores moderadamente grandes de n.

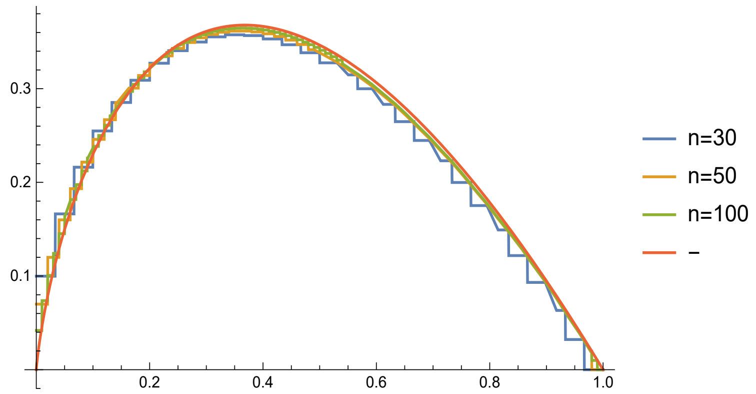

Figura 3: $-x\log(x)$ y $\overline{P}_n^R(\lfloor nx \rfloor)$ con n=30, 50 y 100.

Si consideramos $G_n(k) = \frac{1}{n}$ y $H_n(k) = \frac{k}{k+1}$, tenemos las siguientes convergencias uniformes sobre compactos de la forma $[\epsilon, \epsilon'] \in (0,1)$:

$$g_n(x) = nG_n(\lfloor nx \rfloor) = n\frac{1}{n} = 1 \longrightarrow g(x) = 1$$

$$h_n(x) = n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) = n\frac{1}{\lfloor nx \rfloor + 1} \longrightarrow h(x) = \frac{1}{x}.$$

Si asumimos la condición ii) del Teorema 3.1, es decir, que $f_n(x) = \overline{P}_n^R(\lfloor nx \rfloor)$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una cierta función f, entonces esta función debe satisfacer la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)h(x) - g(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} - 1$$

y la condición $f(1) = 0$, de modo que llegamos nuevamente a $f(x) = -x\log(x)$.

3.2. Problema de la Secretaria con empleo incierto

Consideraremos el clásico problema de la secretaria con la posibilidad adicional de que una candidata seleccionada no esté disponible (cada candidata rechaza la oferta de empleo con probabilidad conocida). Si este es el caso, las entrevistas continúan. Esta variante aparece estudiada en [12].

Un enunciado alternativo equivalente sería el siguiente:

Tenemos n objetos rankeados en una urna pintados de blanco o negro con probabilidades p y $1-p$, respectivamente. Consideraremos éxito seleccionar el mejor objeto y sólo se permite seleccionar un objeto blanco.

Si p es el valor de la probabilidad de aceptación del empleo, el programa dinámico correspondiente para el cálculo de la probabilidad de éxito al rechazar el objeto k-ésimo es

$$P_n^R(k) = \frac{p}{k+1} \max\left\{\frac{k+1}{n}, P_n^R(k+1)\right\} + \left(1 - \frac{p}{k+1}\right) P_n^R(k+1)\ ;\ P_n^R(n) = 0.$$

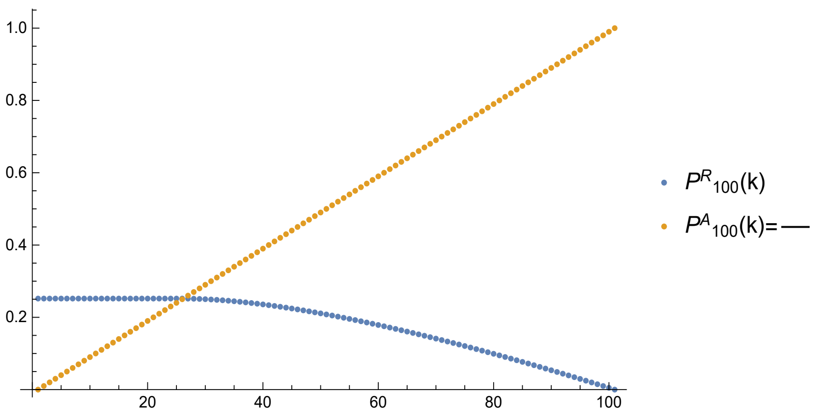

Figura 4: $p = \frac{1}{2}$

En este caso, la estrategia óptima también es de tipo umbral. Denotaremos por κ_n al umbral óptimo y $\mathbf{P}_n$ a la probabilidad de éxito utilizando la estrategia óptima. La función $\overline{P}_n^R(k)$, que representa la probabilidad de éxito al utilizar k como umbral, obedece a la siguiente recurrencia

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{p}{n} + \left(1 - \frac{p}{k+1}\right) \overline{P}_n^R(k+1)\ ;\ \overline{P}_n^R(n) = 0.$$

Si consideramos $G_n(k) = \frac{p}{n}$ y $H_n(k) = \left(1 - \frac{p}{k+1}\right)$ tenemos las siguientes convergencias uniformes sobre compactos de la forma $[\epsilon, \epsilon'] \in (0,1)$:

$$g_n(x) = nG_n(\lfloor nx \rfloor) = n\frac{p}{n} = p \longrightarrow g(x) = p$$

$$h_n(x) = n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) = n\frac{p}{\lfloor nx \rfloor + 1} \longrightarrow h(x) = \frac{p}{x}.$$

Si asumimos la condición ii) del Teorema 3.1, es decir, que $f_n(x) = \overline{P}_n^R(\lfloor nx \rfloor)$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una cierta función f, entonces esta función f debe satisface la ecuación diferencial

$$f'(x) = \frac{pf(x)}{x} - p; f(1) = 0$$

cuya solución es

$$f(x) = \frac{p\,(x^p - x)}{1-p}.$$

De modo que tendremos la siguiente convergencia uniforme en $[0,1]$

$$\overline{P}_n(\lfloor nx \rfloor) \longrightarrow \overline{P}^R(x) = \frac{p\,(x^p - x)}{1-p}.$$

La función $\overline{P}^R(x)$ alcanza su máximo dentro de $[0,1]$ en $x = p^{\frac{1}{1-p}}$ y el valor máximo es también $p^{\frac{1}{1-p}}$. Así pues, tenemos por el Teorema 2.1, que:

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow p^{\frac{1}{1-p}}$$

$$\mathbf{P}_n = \overline{P}_n^R(\kappa_n) \longrightarrow \overline{P}^R(p^{\frac{1}{1-p}}) = p^{\frac{1}{1-p}}.$$

Ejemplo 3.1. *Supongamos un gran número de objetos en una urna, rankeados y pintados de blanco o negro con probabilidad $p = 1/2$. Consideraremos éxito seleccionar el mejor objeto y que éste sea blanco. La estrategia óptima consistiría en rechazar 1/4 de los objetos y a partir de entonces seleccionar el primer objeto blanco que sea mejor que todos los objetos anteriores. La probabilidad de éxito, utilizando esta estrategia, será aproximadamente 1/4.*

Si $p = 1/2$,

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow p^{\frac{1}{1-p}} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P}_n = \overline{P}_n^R(\kappa_n) \longrightarrow \overline{P}^R(p^{\frac{1}{1-p}}) = p^{\frac{1}{1-p}} = \frac{1}{4}.$$

3.3. Problema de la Secretaria con costes por entrevista

Se considera el problema estándar con un pago unitario por el éxito y un coste de $\frac{c}{n}$, con $c < 1$, por cada entrevista realizada. Este problema aparece tratado en [2].

Llamando $P_n^R(k)$ a la ganancia esperada al rechazar una candidata en la entrevista k-ésima, tenemos el siguiente programa dinámico:

$$P_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \cdot \text{máx}\left\{\frac{k+1}{n} - \frac{c(k+1)}{n}, P_n^R(k+1)\right\} + \frac{k}{k+1}P_n^R(k+1)\ ;\ P_n^R(n) = -c.$$

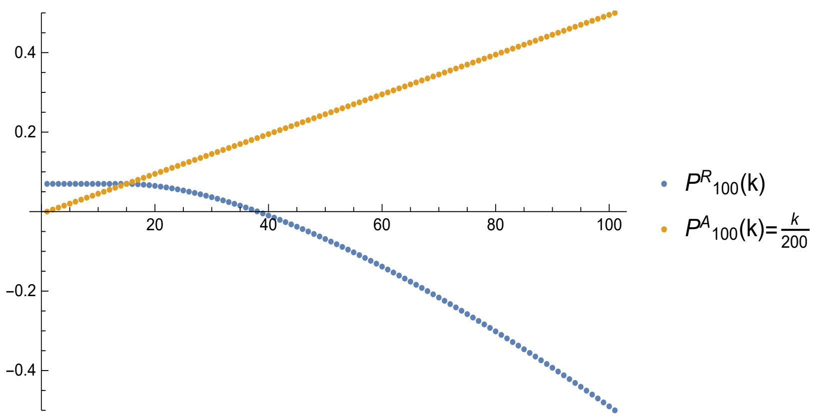

Figura 5: $c = \frac{1}{2}$

La estrategia óptima es de tipo umbral y denotaremos por $\overline{P}_n^R(k)$ a la ganancia esperada al rechazar a una candidata en la entrevista k-ésima quedando a la espera de la próxima buena candidata, que es equivalente a la ganancia esperada utilizando k como umbral.

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{k+1}{n} - \frac{c(k+1)}{n}\right) + \frac{k}{k+1}\overline{P}_n^R(k+1)\ ;\ \overline{P}_n^R(n) = -c$$

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{1-c}{n} + \frac{k}{k+1}\overline{P}_n^R(k+1)\ ;\ \overline{P}_n^R(n) = -c.$$

Si consideramos $G_n(k) = \frac{1-c}{n}$ y $H_n(k) = \frac{k}{k+1}$, tenemos las siguientes convergencias uniformes sobre compactos de la forma $[\epsilon, \epsilon'] \in (0,1)$:

$$g_n(x) = nG_n(\lfloor nx \rfloor) = 1 - c \longrightarrow g(x) = 1 - c$$

$$h_n(x) = n(1 - H_n(\lfloor nx \rfloor)) = \frac{n}{\lfloor nx \rfloor + 1} \longrightarrow h(x) = \frac{1}{x}.$$

Procediendo de igual modo que en la variante anterior, el problema se reduce a resolver el problema de valor inicial

$$\frac{f(x)}{x} + c - 1 = f'(x)\ ;\ f(1) = -c$$

cuya solución es

$$f(x) = -cx + cx\log(x) - x\log(x).$$

De modo que tendremos la siguiente convergencia uniforme en $[0,1]$

$$\overline{P}_n(\lfloor nx \rfloor) \longrightarrow \overline{P}^R(x) = -cx + cx\log(x) - x\log(x).$$

La función $\overline{P}^R(x)$ alcanza su máximo valor dentro de $[0,1]$ en $x = e^{\frac{1}{c-1}}$, de modo que, por el Teorema 2.1,

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow e^{\frac{1}{c-1}}$$

$$\mathbf{P}_n = \overline{P}_n^R(\kappa_n) \longrightarrow \overline{P}^R\left(e^{\frac{1}{c-1}}\right) = (1-c)e^{\frac{1}{c-1}}.$$

3.4. Problema de la Secretaria con pagos según éxito, fracaso o no selección

Consideraremos el problema de la secretaria en el que la recompensa por acertar el mejor objeto es α, se penaliza con β seleccionar erróneamente un objeto y se penaliza con γ no seleccionar ningún objeto. Este problema aparece propuesto en [7] como *The win-lose-or-draw marriage problem* (caso $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 0$).

Llamando $P_n^R(k)$ a la ganancia esperada al rechazar un objeto en la inspección k-ésima, tenemos el siguiente programa dinámico:

$$P_n^R(k) = \frac{1}{k+1} \text{máx} \left\{ \alpha \frac{k+1}{n} - \beta \frac{n-k-1}{n}, P_n^R(k+1) \right\} + \frac{k}{k+1} P_n^R(k+1) \; ; \; P_n^R(n) = -\gamma$$

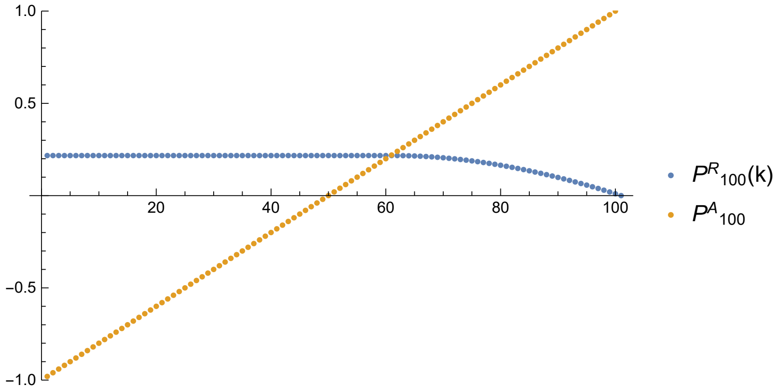

Figura 6: $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 0$.

En este caso, la estrategia óptima también es de tipo umbral. Denotaremos por κ_n al umbral óptimo y por $\mathbf{P}_n$ a la ganancia esperada utilizando la estrategia óptima.

La función $\overline{P}_n^R(k)$, que representa la ganancia esperada al utilizar k como umbral, obedece a la siguiente recurrencia:

$$\overline{P}_n^R(k) = \frac{\alpha \frac{k+1}{n} - \beta \frac{-k+n-1}{n}}{k+1} + \frac{k\overline{P}_n^R(k+1)}{k+1} \; ; \; \overline{P}_n^R(n) = -\gamma.$$

Si consideramos $G_n(k) = \frac{\alpha \frac{k+1}{n} - \beta \frac{-k+n-1}{n}}{k+1}$ y $H_n(k) = \frac{k}{k+1}$, tenemos las dos siguientes convergencias uniformes sobre compactos de la forma $[\epsilon, \epsilon'] \in (0,1)$:

$$g_n(x) = n \frac{\alpha \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} - \beta \frac{-\lfloor nx \rfloor + n - 1}{n}}{\lfloor nx \rfloor + 1} \longrightarrow g(x) = \alpha - \frac{\beta}{x} + \beta$$

$$h_n(x) = n \frac{1}{\lfloor nx \rfloor + 1} \longrightarrow h(x) = \frac{1}{x}.$$

Procediendo de igual modo que en la variante anterior, el problema se reduce a resolver el problema de valor inicial

$$f'(x) = -\alpha - \beta + \frac{\beta}{x} + \frac{f(x)}{x}; f(1) = -\gamma$$

cuya solución es

$$f(x) = -x(\alpha+\beta)\log(x) + \beta(x-1) - \gamma x.$$

Así pues, tendremos la convergencia uniforme en $[0,1]$

$$\overline{P}_n(\lfloor nx \rfloor) \longrightarrow \overline{P}^R(x) = -x(\alpha+\beta)\log(x) + \beta(x-1) - \gamma x.$$

La función $\overline{P}^R(x)$ alcanza su máximo en $[0,1]$ en

$$e^{\frac{-\gamma-\alpha}{\alpha+\beta}}$$

de modo que, por el Teorema 2.1,

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow e^{\frac{-\gamma-\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$\mathbf{P}_n = \overline{P}_n^R(\kappa_n) \longrightarrow \overline{P}^R\left(e^{\frac{-\gamma-\alpha}{\alpha+\beta}}\right).$$

Ejemplo 3.2. *Para el caso $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 0$, tenemos el caso mencionado en [7], cuya solución es:*

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.60653...$$

$$\mathbf{P}_n \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 = 0.213061...$$

3.5. Problema de la Secretaria con número de candidatas aleatorio $U[1,n]$

Consideraremos el problema estándar de la secretaria con la salvedad de que el número de candidatas es desconocido y resultado de un experimento aleatorio con distribución uniforme en $\{1,2,...,n\}$. Este problema fue tratado en [11] y aparece también resuelto en [7].

Denotaremos por $P_n^R(k)$ la probabilidad de éxito al rechazar una candidata en la entrevista k-ésima para seguir luego la estrategia óptima. Para $P_n^R(k)$ tenemos la siguiente recurrencia:

$$P_n^R(k) = \mathfrak{M}_n(k)\frac{1}{k+1}\,\text{máx}\{P_n^A(k+1), P_n^R(k+1)\} + \mathfrak{M}_n(k)\frac{k}{k+1}P_n^R(k+1); P_n^R(n) = 0,$$

donde $\mathfrak{M}_n(k)$ representa la probabilidad de que al rechazar una candidata en la entrevista k-ésima haya más candidatas y $P_n^A(k)$ la probabilidad de éxito aceptando en la entrevista k-ésima una buena candidata.

- $\mathfrak{M}_n(0) = 1$ y, para $k > 0$, tenemos:

$$\mathfrak{M}_n(k) := \frac{n-k}{-k+n+1}.$$

- $$P_n^A(k) = \frac{1}{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i} = \frac{k(\psi(n+1)-\psi(k))}{-k+n+1}.$$

En este caso, la estrategia óptima también es de tipo umbral, aunque la demostración no es tan sencilla como la del caso del problema clásico. En la Figura 7 puede verse que $P_n^R(k)$ no es monótona y de ahí que no pueda usarse el argumento estándar de los casos anteriores.

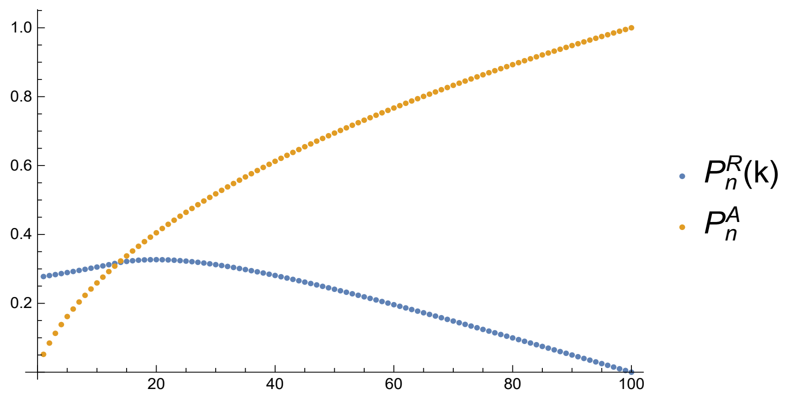

Figura 7

Considerando ahora la función $\overline{P}_n^R(k)$, que representa la probabilidad de éxito al rechazar la candidata k-ésima quedando a la espera de la próxima buena candidata (si la hubiere), tenemos

$$\overline{P}_n^R(k) = \mathfrak{M}_n(k)\frac{1}{k+1}P_n^A(k+1) + \mathfrak{M}_n(k)\frac{k}{k+1}\overline{P}_n^R(k+1); \overline{P}_n^R(n) = 0.$$

Ahora podemos construir la función $\mathbf{U}(k)$, que representa la probabilidad de éxito utilizando umbral k. Esta será el producto de la probabilidad de que se llegue a la entrevista k-ésima (llamémosle $\pounds_n(k)$) y la probabilidad de éxito al rechazarla y quedar a la espera de una buena candidata, $\overline{P}_n^R(k)$. Con todo ello, tendremos:

$$\pounds_n(k) := \frac{n-k+1}{n}$$

$$\mathbf{U}_n(k) = \pounds_n(k) \cdot \overline{P}_n^R(k)$$

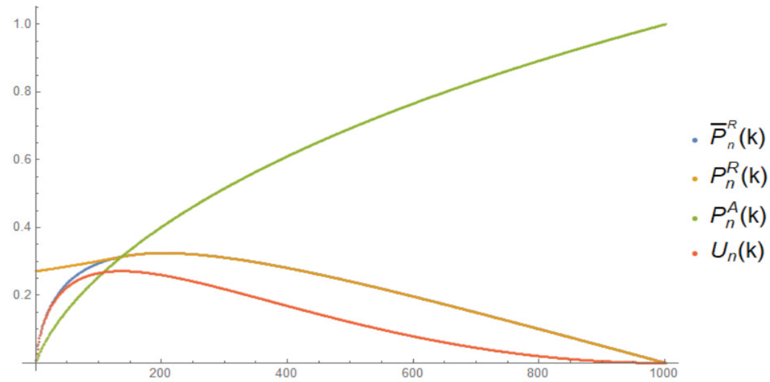

Figura 8

■ **Cálculo de los valores asintóticos del umbral óptimo y probabilidad de éxito.** Tendremos en cuenta las siguientes convergencias uniformes sobre compactos de la forma $[\epsilon, \epsilon'] \in (0,1)$;

△

$$\mathfrak{M}_n(\lfloor nx \rfloor) = \frac{n - \lfloor nx \rfloor}{n - \lfloor nx \rfloor + 1} \longrightarrow \mathfrak{M}(x) = 1.$$

△

$$P_n^A(\lfloor nx \rfloor) = \frac{\lfloor nx \rfloor(\psi(n+1) - \psi(\lfloor nx \rfloor))}{-\lfloor nx \rfloor + n + 1} \longrightarrow P^A(x) = \frac{x \log(x)}{x-1}.$$

△

$$g_n(x) = n \cdot \mathfrak{M}_n(\lfloor nx \rfloor)\frac{1}{\lfloor nx \rfloor + 1}P_n^A(\lfloor nx \rfloor + 1) \longrightarrow \mathbf{g}(x) = \frac{\log(x)}{x-1},$$

$$h_n(x) = n\left(1 - \mathfrak{M}_n(\lfloor nx \rfloor)\frac{\lfloor nx \rfloor}{\lfloor nx \rfloor + 1}\right) \longrightarrow \mathbf{h}(x) = \frac{1}{x - x^2}.$$

Procediendo ahora como en las variantes anteriores, se trata de resolver el problema de valor inicial

$$f'(x) = f(x)\mathbf{h}(x) - \mathbf{g}(x); f(1) = 0$$

cuya solución es

$$f'(x) = \frac{f(x) + x\log(x)}{x - x^2}; f(1) = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{x\log^2(x)}{2(x-1)}.$$

Tenemos, por tanto, la siguiente convergencia uniforme en $[0,1]$,

$$\overline{P}_n^R(\lfloor nx \rfloor) \longrightarrow \overline{P}^R(x) = -\frac{x\log^2(x)}{2(x-1)}$$

Finalmente, tenemos también las siguientes convergencias uniformes en $[0,1]$:

$$\pounds_n(\lfloor nx \rfloor) = \frac{n - \lfloor nx \rfloor + 1}{n} \longrightarrow (1-x).$$

$$\mathbf{U}_n(\lfloor nx \rfloor) \longrightarrow \mathbf{U}(x) = \overline{P}^R(x)(1-x) = \frac{x\log^2(x)}{2}.$$

Ahora, puesto que el valor máximo de $\mathbf{U}$ en $[0,1]$ se alcanza en $x = e^{-2}$, usando el Teorema 2.1, tendremos:

$$\frac{\kappa_n}{n} \longrightarrow e^{-2} = 0.1353352...$$

$$\mathbf{P}_n \longrightarrow \mathbf{U}(e^{-2}) = 2e^{-2} = 0.27067056...$$

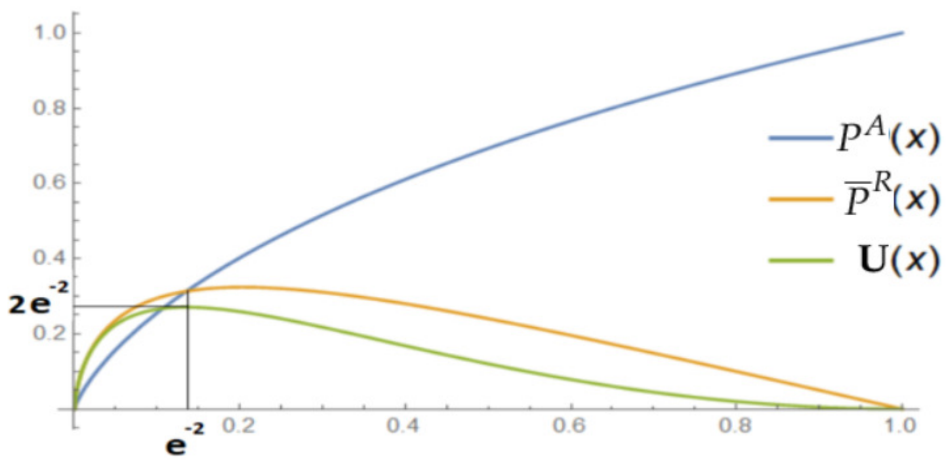

Figura 9

REFERENCIAS

[1] Alzer, H. (1997)
On some inequalities for the gamma and psi functions.
Mathematics of Computation. 66(217), pp. 373–389.

[2] Bartoszynski, R. and Govindarajulu, Z. (1978)
The Secretary Problem with Interview Cost.
The Indian Journal of Statistics, Series B (1960-2002). 40(1/2), pp. 11–28.

[3] Bruss F.T. (2000)
Sum the Odds to One and Stop.
Annals of Probability. 28, pp. 1384–1391.

[4] Bruss F.T. (2019)
Odds-Theorem and Monotonicity.
Mathematica Applicanda. 47(1), pp. 25–43.

[5] Dynkin, E.B. (1963)
Optimal choice of the stopping moment of a Markov proces.
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150(2), 238–240.

[6] Ferguson, T.S. (1989)
Who solved the secretary problem?
Statistical Science. 4(3), pp. 282–296.

[7] Ferguson, T.S. (2008)
Optimal Stopping and Applications.
https://www.math.ucla.edu/∼tom/Stopping/Contents.html

[8] Gilbert, J. and Mosteller, F. (1966)
Recognizing the maximum of a sequence.
Journal of the American Statistical Association. 61, pp. 35–73.

[9] Grau Ribas, J.M. (2019)
A new look at the returning secretary problem.
Journal of Combinatorial Optimization. 37(4), pp. 1216–1236.

[10] Lindley, D.V. (1961)
Dynamic programming and decision theory.
Journal of the Royal Statistical Society. Series C. 10(1), pp. 39–51.

[11] Presman, E.L. and Sonin, I.M. (1973)
The best choice problem for a random number of objects.
Theory of Probability and Its Applications. 17(4), pp. 657–668.

[12] Smith, M.H. (1975)
A secretary problem with uncertain employment.
Journal of Applied Probability. 12, pp. 620–624.